VITTORIO EMA
Digitized by Google



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio





Palchetto

Num.° d' ordine



B. L
I
433

Digitized by Google

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Digitized by Google

606589

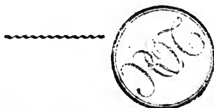
ANALYSE ALGÉBRIQUE,

Faisant suite aux Élémens d'Algèbre,

PAR J. G. GARNIER,

Ex-Professeur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique, et Instituteur.

SECONDE SECTION.



À PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 71.

AN XII = 1804.





Digitized by Google

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

CETTE seconde Section sert de complément à mes Élémens d'Algèbre, en même temps qu'elle est une préparation à l'étude de l'Analyse différentielle et intégrale. Ces trois Traités, dont le dernier paraîtra très-incessamment, joints à l'Arithmétique que j'ai publiée l'année dernière, formeront la partie élémentaire de la Science du Calcul.

Dans cette seconde Partie, qui ne s'adresse plus aux jeunes gens qui étudient à l'effet d'être admis à l'École polytechnique, la quantité, l'étendue et la succession des matières ne sont plus nécessairement déterminées par les besoins du lecteur : aussi, après avoir complété les Théories qui n'étaient qu'élémentées dans la première Section, et développé celles qui forment l'Introduction au Calcul différentiel et intégral, ai-je cru devoir consacrer quelques Chapitres à l'exposition de doctrines éparses dans les Collections académiques et ailleurs, en me bornant cependant à celles de ces recherches que comporte le dessein général de l'Ouvrage. Quant à l'ordre à établir entre ces Chapitres, je me suis décidé pour celui qui offrait le plus de cette variété propre à réveiller et entretenir l'intérêt. C'est encore dans cette vue, que je

me suis appliqué à resserrer, autant que possible, l'étendue de chacun des titres, en même temps que j'ai cherché à multiplier leur nombre.

Il me semble que dans la composition d'un livre du genre de celui-ci, qui n'est plus élémentaire, et qui est tout formé de matériaux empruntés, la tâche de l'Auteur se réduit, à peu-près, au choix et à la coordination de ces matériaux; c'est-à-dire, qu'après les avoir recueillis, il n'a plus qu'à les grouper en corps de doctrine, sous des titres bien appropriés, afin que le lecteur trouve dans ces Chapitres, comme dans autant de cases, ce qu'il y cherche, sans mélange avec des choses étrangères.

Je sais bien qu'il y a quelque difficulté à bien analyser un mémoire étendu, à l'abréger sans tronquer la doctrine, à élaguer ce qui sort du plan de l'Ouvrage; enfin, à ne conserver que ce qui peut convenir à la majorité des lecteurs, de manière cependant que ceux qui veulent aller plus loin, soient suffisamment préparés. Mais enfin, tels sont les engagemens que l'Auteur a dû prendre et qu'il doit tenir. Sans ces conditions, je conçois que rien n'est plus aisé à faire qu'un livre tel que celui-ci.

Plus une science est cultivée, et plus elle s'enrichit, plus les livres se multiplient, et moins deux Ouvrages, sous le même titre, se ressem-

blent : c'est qu'à mesure que le fonds devient plus riche, on s'occupe davantage de la forme; et que quand les matériaux se multiplient, il est de nécessité d'adopter une distribution qui se prête aux acquisitions successives de la science : aussi ce genre de mérite se fait-il plus particulièrement remarquer dans les Traités publiés depuis quelques années. On observera encore que ces progrès de la science ont pour effet de réduire l'étendue des Élémens, en enveloppant plusieurs cas qu'on traitait successivement, dans une commune explication, et c'est ainsi que se forment les méthodes générales : d'ailleurs on sait que le calcul différentiel, par exemple, peut revendiquer plusieurs méthodes classées jusqu'ici dans l'Algèbre, qu'on peut transporter dans celle-ci plusieurs chapitres d'Arithmétique, etc. d'où résulte que si, d'une part, les Elémens doivent s'étendre, lorsque la science reçoit des accroissemens, de l'autre ils perdent plusieurs corps de doctrine qui vont se ranger sous des titres plus éloignés, comme déductions ou comme cas particuliers : tels sont entr'autres les deux Chapitres de cet Ouvrage, intitulés : *Des Développemens en séries des Logarithmes et des quantités trigonométriques*, qu'on pourrait reporter dans le calcul différentiel, à la suite du Théorême de Taylor : dans la première section, *la Méthode*

pour trouver les racines égales, qui est aussi du domaine de cette branche de calcul, et d'autres considérées encore comme des Élémens essentiels de l'Algèbre. Cette marche ne me paraît plus convenir à la Géométrie, dans laquelle une proposition, pour peu qu'elle soit importante, doit être présentée sous forme de théorème, d'abord parce qu'il y a un énoncé qui, plus tard, sera la seule chose à retenir, et parce que la démonstration étant isolée, complète, spéciale, et s'offrant avec plus d'appareil, se grave mieux dans l'esprit. Qu'on présente, ainsi qu'il est possible, la proposition du quarré de l'hypothénuse comme corollaire, ce qui la travestit, pour ainsi dire, en une petite remarque qu'on aurait faite en passant, en une particularité, elle sera à peine distinguée; et parce qu'elle ne portera pas son énoncé, l'Élève ne se fera jamais cette question, et il ne conservera plus qu'un souvenir vague d'une propriété essentielle. Je pense donc que les corollaires doivent être en petit nombre dans la Géométrie, car l'expérience atteste qu'ils sont souvent omis par l'Élève, ou qu'ils sont oubliés aussitôt qu'appris. J'ajouterai par occasion, que j'ai rencontré dans les jeunes gens qui étudient la Géométrie, le goût des réciproques dont les Auteurs s'occupent peu. Au reste, tout ce qu'on peut prescrire de mieux sur cette partie des Élé-

mens est prévu et très-bien développé dans le Discours préliminaire de la Géométrie de *Lacroix*, et mis en pratique dans l'excellent livre de *Legendre*.

La première Section de cet Ouvrage ayant paru l'année dernière, avant que le choix des livres classiques fût fait, je me suis cru engagé à publier la seconde, et conséquemment le Traité d'Analyse différentielle et intégrale, qui doit faire suite et compléter enfin ce Cours. Si mes Élémens d'Arithmétique et d'Algèbre obtiennent les honneurs d'une seconde édition, ils reparaîtront fort améliorés. Tel est le résultat nécessaire de l'épreuve d'un livre par l'enseignement.

J'ai cité avec scrupule les noms des Géomètres dont j'ai emprunté les conceptions; du moins s'il en est quelques-uns qui n'aient pas reçu ce tribut d'hommages, il n'y a pas eu de ma part projet de m'enrichir de leurs idées, ni crainte de voir ma propriété presque réduite à rien par ces restitutions : ce n'a été qu'un oubli très-involontaire, ou impossibilité de constater le titre de propriété; et j'ai trop bien appris que, dans le cas de doute, il vaut mieux ne pas citer que de citer l'un pour l'autre. Je m'empresse donc de réparer deux omissions et de proclamer parmi les ouvrages que j'ai consultés avec bénéfice, celui du *citoyen Reynaud*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, actuellement Professeur attaché au Cadastre, ayant pour titre :

Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie à l'usage des Élèves de l'Ecole Polymatique, et le Traité de *Tedenat*, ancien Professeur d'Ecole centrale. Quant aux emprunts faits aux livres classiques, ou qui se trouvent dans les mains de tous, j'ai pensé que citer, revenait à dire qu'avant de composer des Elémens, on avait eu soin de lire ceux qui existent, ce qu'on suppose généralement, et d'ailleurs, dans ces ouvrages, la modestie des Auteurs ne laisse ordinairement aucune trace de propriété, à moins cependant qu'ils n'aient occasion d'élémenter quelques recherches qu'ils auront consignées dans les Collections académiques. Dans tout autre cas, il convient, ce me semble, de se borner à relater le titre de l'ouvrage, ce qui est autre chose qu'affirmer que la chose qu'on en a extraite, appartient à l'Auteur du Traité.

ALPHABET

DE LA LANGUE GRECQUE. (*)

RANG des LETTRES.	GRANDES LETTRES.	PETITES LETTRES.	LEURS VALEURS.	LEURS PRONONCIATIONS.
1	Α	α	a	alpha
2	Β	β, ϐ	b	bèta
3	Γ	γ, Γ	g	gamma
4	Δ	δ, ∂	d	delta
5	Ε	ε	e	epsilon
6	Ζ	ζ	z	zéta
7	Η	η	ê	êta
8	Θ	θ, ϑ	th	thêta
9	Ι	ι	j	iota
10	Κ	κ	k	cappa
11	Λ	λ	l	lambda
12	Μ	μ	m	mu
13	Ν	ν	n	nu
14	Ξ	ξ	x	xi
15	Ο	ο	o	omicron
16	Π	π, ϖ	p	pi
17	Ρ	ρ, ϱ	r	rho
18	Σ	σ, ς	s	sigma
19	Τ	τ, ꚍ	t	tau
20	Υ	υ	u	upsilon
21	Φ	φ	ph	phi
22	Χ	χ	ch	chi
23	Ψ	ψ	ps	psi
24	Ω	ω	ô	oméga

(*) Comme ces deux Sections se vendent séparément, j'ai cru devoir répéter en tête de chacune l'Alphabet grec, dont les lettres sont plus fréquemment employées dans celle-ci.

Digitized by Google



ANALYSE ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Une équation algébrique de degré quelconque, ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de la forme

$$a + b\sqrt{-1}$$

a *et* b *étant des quantités réelles.*

1. On sait (1ère sect. n°. 288) que toute équation de degré impair est divisible par un facteur réel du premier degré. Il suffit donc de prouver que toute équation de degré pair est décomposable en facteurs du second degré de la forme

$$x^2 + mx + n,$$

m et n étant des quantités réelles.

2. Nous ferons précéder la démonstration de cette proposition de quelques théorêmes préliminaires.

Si une équation algébrique a pour racine une quantité de la forme $a + b\sqrt{-1}$, *elle en aura nécessairement une autre de la forme* $a - b\sqrt{-1}$.

Soit l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Tx - V = 0 \; (M):$$

$a + b\sqrt{-1}$ étant, par hypothèse, une des racines de cette équation, le premier membre s'évanouira en écrivant $a + b\sqrt{-1}$ pour x dans (M); on aura donc

$$(a+b\sqrt{-1})^m - A(a+b\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+B(a+b\sqrt{-1})^{m-2} - \text{etc.} \ldots - V = 0 \ldots (N)$$

En effectuant les développemens, le résultat sera composé de deux espèces de termes, les uns réels donnés par le premier terme de chaque binome, et par les puissances paires de $+b\sqrt{-1}$; les autres imaginaires, provenant des puissances impaires de $+b\sqrt{-1}$: en sorte que le premier membre de (N) sera de la forme $P+Q\sqrt{-1}$, en représentant par P la somme des termes réels, et par Q la somme des coefficiens aussi réels de $\sqrt{-1}$. On aura donc

$$P+Q\sqrt{-1}=0 \text{ d'où } P=0,\ Q=0$$

parce qu'il ne peut y avoir destruction entre des termes réels et des termes imaginaires. Tout se réduit donc à prouver qu'on aura aussi

$$(a-b\sqrt{-1})^m - A(a-b\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+B(a-b\sqrt{-1})^{m-2} - \text{etc.} \ldots = 0 \ldots (P)$$

Or ce résultat sera, comme le précédent, composé de termes réels et de termes imaginaires; les puissances paires de $-b\sqrt{-1}$ étant les mêmes que celles de $+b\sqrt{-1}$, et les premiers termes des binomes étant aussi les mêmes dans (N) et (P), on aura de part et d'autre P pour la somme des termes réels. Les puissances impaires de $-b\sqrt{-1}$ ne différant que par le signe de celles de $+b\sqrt{-1}$, la somme des termes imaginaires sera donc $-Q\sqrt{-1}$, en sorte que le résultat de la seconde substitution sera $P-Q\sqrt{-1}$. Mais on a trouvé

$$P=0,\ Q=0;\ \text{donc } P-Q\sqrt{-1}=0:$$

donc la quantité $a-b\sqrt{-1}$ substituée au lieu de x dans la proposée, réduit aussi le premier membre à zéro.

Toute fonction algébrique de a $\pm$ b $\sqrt{-1}$, *peut être ramenée à la forme* P $\pm$ Q $\sqrt{-1}$, P *et* Q *étant des quantités réelles*

On a

$$1°.\ a \pm b\sqrt{-1} + a' \pm b'\sqrt{-1} + \text{etc.} = a + a' + \text{etc.} \pm (b + b' + \text{etc.})\sqrt{-1}$$

où $\qquad P = a + a' + \text{etc.} \quad Q = b + b' + \text{etc.}$

$$2°.\quad (a \pm b\sqrt{-1})(a' \pm b'\sqrt{-1}) = (aa' - bb') \pm (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

où $\qquad P = aa' - bb'\,;\ Q = a'b + ab'$

$$3°.\quad \frac{a \pm b\sqrt{-1}}{a' \pm b'\sqrt{-1}} = \frac{(a \pm b\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})}{(a' \pm b'\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})} = \frac{(aa' + bb') \pm (a'b - ab')\sqrt{-1}}{a'^2 + b'^2}$$

où

$$P = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\,;\ Q = \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

Les calculs faits pour démontrer le premier théorême de ce titre, prouvent que la fonction $(a \pm b\sqrt{-1})^m$ est de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$. On peut encore démontrer cette proposition par les simples opérations de l'algèbre élémentaire, lorsque $a \pm b\sqrt{-1}$ est affecté d'un radical pair de la forme 2^m. Considérons donc la fonction $\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$, et posons

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}} = u \ldots. (1)$$

élevant au carré, il vient

$$2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} = u^2$$

quantité nécessairement positive. Donc u sera une quantité

réelle : élevant ensuite au carré la différence

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=t\ldots.(2)$$

ce qui donne

$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2,$$

t^2 sera une quantité essentiellement négative : donc on pourra poser

$$t^2=-V^2;\ \text{d'où } t=\pm V\sqrt{-1}$$

V étant une quantité réelle : ajoutant les résultats (1) et (2), il viendra

$$2\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=u\pm V\sqrt{-1}$$

et retranchant (2) de (1), on aura

$$2\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u\mp V\sqrt{-1};$$

d'où on conclut, en prenant les signes supérieurs de V,

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(u\pm V\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}$$

Considérons encore la quantité

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=z\ldots.(3)$$

on aura par l'élévation au carré,

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$
$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u+2\sqrt[4]{a^2+b^2}=z^2$$

quantité essentiellement positive, donc z sera une quantité réelle. Si on élève au carré les deux membres de

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=v\ldots.(4)$$

on aura

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$
$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u-2\sqrt[4]{a^2+b^2}=v^2$$

quantité essentiellement négative, car on a fait plus haut

$$u=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$$

en sorte que

$$u^2=2a+2\sqrt{a^2+b^2}<4\sqrt{a^2+b^2}$$

donc $u<2\sqrt[4]{a^2+b^2}$.

Soit $v^2=-X^2$, d'où $v=\pm X\sqrt{-1}$

X étant une quantité réelle : combinant les équations (3) et (4) par addition et par soustraction, il viendra

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(z\pm X\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}$$

où P et Q sont des quantités réelles.

3. Nous passerons maintenant à la démonstration du théorême annoncé. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+V=0$$

m étant de la forme 2μ, μ étant un nombre impair, et conséquemment m un nombre pair une fois seulement divisible par 2. Quoique les racines de cette équation ne soient pas connues, on pourra néanmoins exprimer au moyen des coefficiens $A, B\ldots T$ et V, ceux d'une autre équation qui aurait pour racines toutes les sommes différentes des racines a, b, c, etc. prises deux à deux. (*) Une équation ainsi formée sera du degré $m\,\frac{m-1}{2}$, nombre impair, puisque, par hypothèse, m est une seule fois divisible par 2; donc elle aura, au moins,

(*) Cette question sera résolue dans l'un des Chapitres suivans, qui ne suppose en aucune manière la doctrine exposée dans celui-ci.

une racine réelle ; mais l'équation qui aurait pour racines tous les produits différens des racines de la proposée, multipliées deux à deux, serait aussi du degré $\frac{m.\overline{m-1}}{2}$; donc il existe deux racines de la proposée, dont la somme est réelle, et deux dont le produit est aussi réel. Mais pour que la proposée soit divisible par un facteur réel tel que $x^2 + mx + n$, il faut de plus que les deux racines qui donnent une somme réelle, donnent aussi un produit réel. Pour prouver que la proposée aura deux racines qui satisferont à cette condition, considérons l'équation dont les racines soient une fonction de celles de la proposée, telles que $a + b + kab$, le coefficient k étant quelconque : cette équation sera encore du degré $m\frac{m-1}{2}$; elle aura donc, au moins, une racine réelle; et comme on peut assigner à k une infinité de valeurs différentes, on pourra donc former une infinité de ces équations dont chacune aura, au moins, une racine réelle ; et si, par exemple, la proposée est du sixième degré, on ne pourra nier que quinze fois desuite que la racine réelle qu'on trouve, ne soit la même, à la différence du nombre k, que l'une des racines réelles déjà trouvées : conséquemment il existera deux racines réelles telles que

$$a + b + kab$$
$$a + b + k'ab$$

qui se composeront des mêmes lettres, en sorte qu'on aura

$$a + b + kab = \alpha$$
$$a + b + k'ab = \beta$$

α et β étant des quantités réelles : on déduit de là

$$ab = \frac{\alpha - \beta}{k - k'}; \quad a + b = \frac{k'\alpha - k\beta}{k' - k}$$

Donc l'équation du degré 2μ, μ étant un nombre impair quelconque, admet un facteur réel du second degré.

Si la proposée est du degré 4μ, μ étant un nombre impair quelconque, l'équation d'où dépendra la fonction des racines $a + b + kab$, sera du degré 2ν, ν étant aussi un nombre impair; cette équation aura, d'après ce qui vient d'être démontré, un facteur réel de la forme

$$u^2 + m'u + n'$$

qui, par sa résolution, donnera l'une des fonctions

$$a + b + kab,\ a + c + kac,\ \text{etc.}$$

Parmi toutes ces racines, il y en aura une de la forme $A + B\sqrt{-1}$, et donnant à k une infinité de valeurs successives, chacune des équations résultantes admettra un facteur réel du second degré qui donnera une racine de la même forme: on retrouvera donc nécessairement deux combinaisons entre les mêmes lettres

$$a + b + kab = A + B\sqrt{-1}$$
$$a + b + k'ab = A' + B'\sqrt{-1}$$

d'où on déduit

$$a + b = M + N\sqrt{-1};\ ab = M' + N'\sqrt{-1}$$

donc la proposée aura un facteur du second degré de la forme

$$x^2 - (M + N\sqrt{-1})x + M' + N'\sqrt{-1};$$

d'où

$$x = \frac{M + N\sqrt{-1}}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{M + N\sqrt{-1}}{2}\right]^2 - (M' + N'\sqrt{-1})}$$

réductible à la forme

$$x = P + Q\sqrt{-1}.$$

Mais une racine de cette forme a toujours, d'après ce qui a été démontré précédemment, une conjuguée telle que

$$x = P - Q\sqrt{-1}$$

et le produit des facteurs correspondans est $x^2 + mx + n$, m

et n étant des quantités réelles. *Donc une équation du degré* 4μ, *μ étant impair, admet un facteur réel du second degré.*

4. On étendrait facilement cette analyse à une équation d'un degré trois, quatre, etc. fois divisible par 2, et on conclurait

1°. *Qu'une équation de degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré.*

2°. *Qu'une équation ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de même forme que celles du second degré.*

On peut conclure de la proposition précédente *que toute fonction algébrique de* $a + b\sqrt{-1}$ *est de même forme :* car égalant la fonction qu'on considère à une inconnue, et faisant disparaître les radicaux qu'elle contient par l'élévation aux puissances, on aura pour déterminer l'inconnue, une équation de degré pair, dont les racines imaginaires seront de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$

CHAPITRE II.

Des racines imaginaires.

5. Nous allons assigner des caractères qui servent à reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles, et le plus grand nombre de racines imaginaires qu'elle puisse comporter.

Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, les différences entre ces racines sont aussi réelles et leurs quarrés essentiellement négatifs. Aussi, dans ce cas, l'équation aux quarrés des différences (Ire Sect. n°. 295) a toutes ses racines réelles et positives, et par conséquent tous ses termes sont alternativement positifs et négatifs (*idem*, n°. 306). Réciproquement, si l'équation aux quarrés des différences n'a que des variations de signes, la proposée n'admet que des racines réelles (n°. *idem*); car si les racines n'étaient pas toutes réelles, il y en aurait, au moins, deux imaginaires que nous désignerons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$

et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; le quarré de leur différence serait $-4\beta^2$: donc l'équation aux quarrés des différences aurait, au moins, une racine réelle négative, et par conséquent, au moins, une permanence, ce qui est contre la supposition.

Puisque chaque couple de racines imaginaires de l'équation proposée, introduit, au moins, une racine réelle négative dans l'équation aux quarrés des différences, et qu'une racine réelle négative introduit au moins une permanence de signes, l'équation proposée ne pourra donc avoir un nombre de racines imaginaires, plus grand que le double du nombre de permanences qui se trouvent dans l'équation aux quarrés des différences. Ainsi on pourra toujours reconnaître à l'inspection des signes de cette équation, si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles, et le plus grand nombre de racines imaginaires qu'elle peut admettre.

Appliquons ces théorèmes à quelques équations, et soit d'abord celle du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0:$$

l'équation aux quarrés des différences est

$$y - A' = 0,$$

dans laquelle

$$A' = A^2 - 4B;$$

or, pour que les racines de la proposée soient réelles, il faut que les signes de l'équation aux quarrés des différences soient alternatifs, ou qu'on ait

$$A' > 0 \text{ ou } \frac{A^2}{4} - B > 0.$$

Elles seront imaginaires dans le cas de

$$A' < 0 \text{ ou } \frac{A^2}{4} - B < 0.$$

Pour qu'elles soient égales, il faut qu'on ait

$$A' = 0 \text{ ou } \frac{A^2}{4} - B = 0$$

conclusions que nous avons déduites immédiatement de l'examen des racines (Iere sect. chap. XVII).

Pour que les racines de l'équation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

soient toutes réelles, il faut que l'équation aux quarrés des différences des racines

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0$$

dont les coefficiens ont été calculés (Iere sect. n°. 304), ne contienne que des variations de signes, ou qu'on ait

$$A' > 0, \quad C' > 0;$$

car B' est essentiellement > 0, puisque B' est un quarré. Si l'une de ces conditions manque, la proposée ne pourra avoir toutes ses racines réelles; elle en aura donc deux imaginaires (chap. précéd.). Lorsque le second terme manque dans la proposée, les conditions ci-dessus se réduisent à

$$B < 0 \;:\; \frac{B^3}{27} > \frac{C^2}{4}.$$

Elles sont les mêmes que celles qui seront déduites des formules générales des racines que nous donnerons dans l'un des chapitres suivans.

Nous avons trouvé (Iere sect. n°. 304) que l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

avait pour équation aux quarrés des différences

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0.$$

Comme cette équation n'a pas les signes alternativement

positifs et négatifs, on en conclut sur-le-champ que la proposée a nécessairement deux racines imaginaires, et par conséquent une seule racine réelle.

En partant des coefficiens de l'équation aux quarrés des différences d'une équation du quatrième degré, Lagrange assigne les relations qui doivent exister entre ceux de la proposée pour que celle-ci ait toutes ses racines réelles ou imaginaires. Passant ensuite aux racines de l'équation du cinquième degré, il dit que leur réalité exige que chacun des coefficiens A', B', C', etc. de l'équation aux quarrés des différences, soit positif ; ce qui donne dix conditions dont quelques-unes peuvent se trouver comprises dans le système des autres, ce qui en diminuerait le nombre.

On peut, dans certains cas, déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires. Soient a, b, c, etc. les racines réelles d'une équation,

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1}\,;\ \gamma \pm \delta\sqrt{-1}\,;\ \text{etc.}$$

les racines imaginaires ; les quarrés des différences seront

1°.... Entre les racines réelles,

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2,\ \text{etc.}$$
$$(b-c)^2,\ (b-d)^2,\ (c-d)^2,\ \text{etc.}$$

2°... Entre les racines imaginaires conjuguées,

$$-4\beta^2 - 4\delta^2,\ \text{etc.}$$

3°.... Entre les racines réelles et les racines imaginaires,

$$[(\alpha-a)+\beta\sqrt{-1}]^2,\ [(\alpha-a)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-b)+\beta\sqrt{-1}]^2,\ [(\alpha-b)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-c)+\beta\sqrt{-1}]^2,\ [(\alpha-c)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-d)+\beta\sqrt{-1}]^2\ \ [(\alpha-d)-\beta\sqrt{-1}]^2.$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

4°. Entre les racines imaginaires non conjuguées,

$$[(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2$$
etc. etc.

Soit m le degré de l'équation proposée ; celui de l'équation aux carrés des différences des racines, sera $\frac{m.m-1}{2}=n$; soient p le nombre des racines réelles, $2q$ celui des imaginaires, en sorte que

$$m=p+2q:$$

il est facile de voir que parmi les n racines de l'équation aux carrés des différences, il y en aura nécessairement $p.\frac{p-1}{2}$ réelles et positives, q réelles et négatives, $2pq$ imaginaires de la troisième espèce distinguée ci-dessus, et $2q(q-1)$ imaginaires de la quatrième espèce, parce que du nombre $\frac{2q(2q-1)}{2}$ qui exprime celui des différences entre toutes les racines imaginaires, on doit retrancher q différences déjà prises : on aura donc, en total, $2q(p+q-1)$ racines imaginaires.

Qu'on effectue partiellement les produits des facteurs correspondans à chacune des classes de racines ci-dessus, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines sera le produit de tous les derniers termes des produits ainsi formés, et il est clair

1°. Que le produit des facteurs dus aux $\frac{p.(p-1)}{2}$ racines réelles et positives aura son dernier terme positif ou négatif, suivant que le nombre de ces racines sera pair ou impair.

2°. Que celui des facteurs résultans des racines de la seconde classe, aura toujours son dernier terme positif, quel que soit le nombre de ces racines.

3°. Que celui des facteurs correspondans à toutes les ra-

cines imaginaires aura toujours le dernier terme positif, puisque ces racines étant deux à deux de la forme $(A+B\sqrt{-1})^2$ et $(A-B\sqrt{-1})^2$, les produits des seconds termes des facteurs conjugués seront de la forme $(A^2+B^2)^2$, en sorte que le dernier terme sera essentiellement positif.

D'où on conclura que le dernier terme de l'équation aux carrés des différences sera positif ou négatif, suivant que le nombre $\frac{p.(p-1)}{2}$ sera pair ou impair.

Supposons, 1°. que ce dernier terme soit positif, auquel cas le nombre $p.\frac{p-1}{2}$ doit être pair : donc ou

$$\frac{p}{2}=2\lambda\,;\text{ d'où } p=4\lambda$$

ou

$$\frac{p-1}{2}=2\lambda\,;\text{ d'où } p=4\lambda+1\,;$$

d'où il suit que le nombre des racines réelles de la proposée sera multiple de 4, s'il doit être pair, c'est-à-dire, si le degré de l'équation est pair, ou multiple de 4 augmenté de l'unité si le degré de l'équation est impair. Il sera donc impossible que le nombre des racines réelles soit 2, 3, 6, etc. ou de l'une des formes $4\lambda+2$ ou $4\lambda+3$.

Supposons, 2°. que le dernier terme de l'équation aux carrés des différences soit négatif, auquel cas $\frac{p.(p-1)}{2}$ sera un nombre impair, donc alors ou

$$\frac{p}{2}=2\lambda+1\,;\text{ d'où } p=4\lambda+2$$

ou

$$\frac{p-1}{2}=2\lambda+1\,;\text{ d'où } p=4\lambda+3\,;$$

d'où il suit que le nombre des racines réelles de la proposée sera nécessairement multiple de 4 augmenté de 2, si le degré

de la proposée est pair, ou qu'il sera multiple de 4 augmenté de 3 si le degré de la proposée est impair; de sorte qu'il sera impossible que le nombre des racines réelles soit 1, 4, 5, 8, 9, etc. ou, en général, de l'une des formes 4λ et $4\lambda + 1$.

Supposant maintenant que l'on sache d'avance que le nombre des racines imaginaires d'une équation ne peut être plus grand que quatre, et que cette équation soit de degré pair $= 2k$: on pourra d'abord reconnaître, d'après l'inspection des signes de l'équation aux quarrés des différences, si toutes les racines sont réelles; si elles ne le sont pas, l'équation doit donc avoir deux ou quatre racines imaginaires, en sorte que le nombre des racines réelles est $2k-2$ ou $2k-4$; ces nombres sont pairs, et ils diffèrent de deux unités: donc l'un des deux sera compris dans la formule 4λ, et l'autre dans celle-ci $4\lambda + 2$; mais le nombre des racines réelles est de l'une de ces formes 4λ ou $4\lambda + 2$, suivant que le dernier terme de l'équation aux quarrés des différences est positif ou négatif; on saura donc lequel de ces deux nombres représente celui des racines réelles.

Si l'équation proposée est de degré impair $= 2k + 1$, on reconnaîtra de même si toutes les racines sont réelles, en examinant si les signes de l'équation aux quarrés des différences sont alternativement positifs et négatifs : si cette condition n'est pas satisfaite, la proposée aura, d'après ce qu'on sait, *à priori*, deux ou quatre racines imaginaires; donc le nombre des racines réelles sera ou $2k-1$ ou $2k-3$; l'un de ces nombres sera de la forme $4\lambda + 1$, et l'autre de la forme $4\lambda + 3$: le signe du dernier terme de l'équation aux quarrés des différences fera connaître alors celle de ces deux formules dans laquelle le nombre des racines réelles de la proposée se trouve compris.

Ainsi, à la seule inspection des signes de l'équation aux quarrés des différences, on pourra juger, 1°. si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ou non ; 2.° si le nombre des racines réelles est un de ceux-ci, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, etc. compris dans les formules 4λ et $4\lambda + 1$, ou s'il est de

la suite 2, 3, 6, 7, 10, 11, etc. donnée par $4\lambda+2$ et $4\lambda+3$, ce qui suffira pour déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires dans les équations qui ne passent pas le cinquième degré, et dans toutes celles à l'égard desquelles on saura, *à priori*, que le nombre des racines imaginaires ne peut excéder quatre.

6. Nous allons passer à la recherche des racines imaginaires des équations.

On a prouvé que ces racines sont toujours de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, α et β étant des quantités réelles, et on a démontré que la substitution de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ pour x donnait un résultat de la forme $P+Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles, résultat qui ne pouvait être égal à zéro, à moins qu'on ne posât séparément

$$P=0,\ Q=0.$$

Mais

$$P=\alpha^m \quad +P'\alpha^{m-1}+P''\alpha^{m-2}+\text{etc.}=0\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$Q=m\beta\alpha^{m-1}+Q'\alpha^{m-2}+Q''\alpha^{m-3}+\text{etc.}=0\ldots\ldots\ldots(2)$$

P', P'', etc., Q', Q'', etc. étant des fonctions connues de β et des coefficiens de la proposée : la question se réduit donc à trouver tous les systèmes de valeurs réelles de α et β qui satisfont aux deux équations (1) et (2). On y parviendrait en éliminant α suivant la méthode connue, et cherchant les racines réelles de l'équation en β et les valeurs correspondantes de α.

Or, on sait que chaque couple de racines imaginaires conjuguées $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, donne nécessairement dans l'équation aux quarrés des différences une racine réelle négative $-4\beta^2$, d'où il suit qu'en changeant dans celle-ci les signes des puissances impaires de l'inconnue, puis cherchant les racines réelles et positives y', y'', y''', on aura.

$$y'=4\beta^2;\ y''=4\delta^2;\ \text{etc.}$$

d'où

$$\beta=\frac{\sqrt{y'}}{2};\ \delta=\frac{\sqrt{y''}}{2};\ \text{etc.}$$

Les valeurs de β ainsi connues, on opérera sur les équations (1) et (2) comme pour obtenir l'équation finale en , qui donnerait les valeurs de β, δ, etc., mais avant on parviendra à un reste du premier degré de la forme $A\alpha + B$, A et B étant des fonctions de β : ce reste étant égalé à zéro, fournira une equation

$$A\alpha + B = 0$$

qui donnera une valeur corresp. de α. (Ire sect. ch. XXIII.)

Lorsque les parties réelles α, γ, etc. des racines imaginaires seront inégales entre elles et différeront aussi des racines réelles a, b, c, etc. il est évident que l'équation aux quarrés de différences, n'aura d'autres racines négatives que celles-ci $-4\beta^2$, $-4\delta^2$, $-$ etc. ; de sorte que le nombre de ces racines sera précisément le même que celui des couples de racines imaginaires de la proposée, et, dans ce cas, les équations (1) et (2) ne pourront avoir qu'une seule valeur de α, correspondante à chacune des valeurs de β, et par conséquent le plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

Mais s'il arrive que, parmi les quantités α, γ, etc. il s'en trouve d'égales entr'elles, et aux racines réelles a, b, c, etc. alors l'équation aux quarrés des différences aura nécessairement plus de racines négatives que la proposée n'aura de couples de racines imaginaires. En effet, soit $a = \alpha$, les deux racines imaginaires, $[(\alpha - a) + \beta\sqrt{-1}]^2$, $[(\alpha - a) - \beta\sqrt{-1}]^2$, deviendront $-\beta^2$, $-\beta^2$, et par conséquent réelles négatives : de sorte que si la proposée ne contient que les deux imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, l'équation aux quarrés des différences contiendra, dans le cas de $\alpha = a$, outre la racine réelle négative $-4\beta^2$, ces deux autres $-\beta^2$, $-\beta^2$, égales entre elles; d'où l'on voit que lorsque l'équation aux quarrés des différences a trois racines réelles négatives, dont deux sont égales entre elles, alors la proposée peut avoir ou deux racines imaginaires, ou six; savoir,

$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1});\ (\gamma \pm \frac{\beta}{2}\sqrt{-1});\ (\delta \pm \frac{\beta}{2}\sqrt{-1})$$

Si

Si la proposée contient quatre racines imaginaires

$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})\,;\ (\gamma \pm \delta\sqrt{-1})$$

alors l'équation aux quarrés des différences contiendra les deux racines réelles négatives $-4\beta^2$, $-4\delta^2$; mais si $a=\alpha$, elle aura encore les deux suivantes $-\beta^2$, $-\beta^2$; si de plus $b=\gamma$, elle en aura deux autres $-\delta^2$, $-\delta^2$; enfin si on avait $\alpha=\gamma$, alors les quatres racines imaginaires

$$[(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1}\,]^2;\ [(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)\sqrt{-1}\,]^2$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\beta+\delta)\sqrt{-1}\,]^2;\ [(\alpha-\gamma)-(\beta+\delta)\sqrt{-1}\,]^2$$

deviendraient

$$-(\beta-\delta)^2,\ -(\beta-\delta)^2,\ -(\beta+\delta)^2,\ -(\beta+\delta)^2$$

c'est-à-dire réelles négatives et égales deux à deux.

7. D'où il est aisé de conclure

1°. Que lorsque toutes les racines réelles négatives de l'équation aux quarrés des différences, sont inégales entre elles, alors la proposée a nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de ces racines.

2°. Que si, parmi les racines réelles négatives de l'équation aux quarrés des différences, il s'en trouve d'égales entre elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme on vient de le voir, deux racines imaginaires conjuguées ; mais chaque couple de racines négatives égales, telles que $-4\beta^2$, $-4\beta^2$ qui résultent des $\delta=\beta$, indiquent quatre racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\gamma \pm \beta\sqrt{-1}$, tandis que celles-ci $-\beta^2$, $-\beta^2$, $-(\beta-\delta)^2$, $-(\beta-\delta)^2$, etc. qui viennent, par exemple, de $a=\alpha$, et de $\alpha=\gamma$ n'en donnent aucune. Trois racines négatives égales fourniront six racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$, $\varepsilon \pm \lambda\sqrt{-1}$, si elles sont données par $\beta=\delta=\lambda$, ou deux seulement lorsque, par exemple $\alpha=\gamma$ et $\delta = \beta$ auquel cas on a encore trois racines égales chacune à $-4\beta^2$. Quatre

racines négatives égales donneront huit ou quatre racines imaginaires, ou elles n'en donneront aucune si, par exemple, les coefficiens β, δ, etc. de $\sqrt{-1}$ étant égaux, on a de plus $a=\alpha$, $b=\gamma$; α, γ étant les termes réels dans les racines imaginaires.

Or soient $-y'$, $-y'$ deux racines égales négatives de l'équation aux quarrés des différences; on fera comme ci-dessus

$$\beta = \frac{\sqrt{y'}}{2},$$

mais il ne faudra plus substituer cette valeur dans l'équation

$$A\alpha + B = 0,$$

parce que (Ière sect. n°. 262) on en déduirait $\alpha = \frac{0}{0}$, ce qui ne ferait rien connaître : on fera donc les substitutions dans le reste précédent qui sera du second degré en α ; ce reste étant égalé à zéro, donnera ou deux racines réelles, ou deux racines imaginaires. Dans le premier cas, nommant α' et α'' ces deux racines, on aura les quatre racines imaginaires

$$\alpha' \pm \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha'' \pm \beta\sqrt{-1}$$

Dans le second cas, les valeurs de α étant imaginaires, contre l'hypothèse, on en conclura que les deux racines $-y'$, $-y'$ ne donneront pas de racines imaginaires dans la proposée. Si l'équation aux quarrés des différences comportait trois racines negatives égales $-y'$, $-y'$, $-y'$, à la valeur

$$\beta = \frac{\sqrt{y'}}{2}$$

correspondraient trois valeurs de α ; d'où il suit que si on substituait la valeur de β dans le reste du premier ou du second degré, on aurait deux équations qui se reduiraient à zéro, indépendamment de α : on fera donc la substitution dans le reste du troisième degré en α; ce reste égalé à zéro donnera

pour α, ou trois valeurs réelles ou une réelle et deux imaginaires : dans le premier cas, on aura six racines imaginaires, deux seulement dans le second, les valeurs imaginaires de α, devant toujours être rejetées comme contraires à l'hypothèse.

CHAPITRE III.

Génération des fractions continues, leur réduction en fractions ordinaires, et quelques propriétés de ces fractions.

8. SUPPOSONS qu'on ait à évaluer un nombre quelconque a qui ne soit pas un nombre entier : on prendra le nombre entier immédiatement au-dessous de a, et qui conséquemment différera de a d'une fraction plus petite que l'unité. Soit α ce nombre, $a-\alpha$ sera une fraction comprise entre o et 1; de sorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ sera un nombre plus grand que l'unité, et le désignant par b, on aura :

$$\frac{1}{a-\alpha}=b\ldots\ldots(1)$$

on pourra donc chercher le nombre entier qui approchera le plus, en moins, de b; ce nombre étant β, on aura de même $b-\beta$, fraction comprise entre o et 1, conséquemment

$$\frac{1}{b-\beta}=c\ldots\ldots(2)$$

c étant un nombre plus grand que l'unité. On soustraira de c le plus grand nombre entier qu'il contienne, nombre que nous désignerons par γ ; alors $c-\gamma$ sera une fraction comprise entre o et 1, et

$$\frac{1}{c-\gamma}=d\ldots\ldots(3)$$

sera un nombre plus grand que l'unité, et ainsi de suite. Des égalités (1), (2), (3), etc., on déduira les suivantes :

$$a=\alpha+\frac{1}{b};\ b=\beta+\frac{1}{c};\ c=\gamma+\frac{1}{d};\ \text{etc.},$$

et conséquemment

$$a=\alpha+\frac{1}{b};\ a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{c}};$$

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{d}}};\ a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}.$$

Si parmi les quantités a, b, c, d, etc., il s'en trouve une qui soit un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver ce nombre même. Si, par exemple, c est un nombre entier, la fraction continue qui représente le nombre a, sera

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{c}}.$$

En effet, si on substitue pour d sa valeur (3) dans la troisième fraction continue ci-dessus, on aura

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\cfrac{1}{c-\gamma}}}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+c-\gamma}}$$

$$=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}.$$

puisque $c = \gamma$. Cette circonstance aura lieu dans le cas de a nombre commensurable ; mais lorsque a sera un nombre incommensurable, la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

Appliquons ce procédé au développement en fraction continue de la fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers. Il est d'abord évident que le nombre entier α, qui approche le plus, en moins, de la fraction $\frac{A}{B}$, est le quotient de la division de A par B, le nombre A étant plus grand que B. Supposant cette division faite, et nommant le quotient α et C le reste, on aura

$$\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}, \text{ d'où } b = \frac{B}{C}.$$

Pour avoir de même la valeur entière approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il faudra diviser B par C, et prendre pour β le quotient en nombre entier de cette division, alors nommant D le reste, on aura

$$\frac{B}{C} - \beta = \frac{D}{C}, \text{ d'où } c = \frac{C}{D}$$

On continuera donc à diviser C par D, et le quotient sera γ, et ainsi de suite : d'où résulte cette règle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

9. *Divisez le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, et nommez le quotient α; divisez ensuite le dénominateur par le reste, et nommez le quotient β; divisez le premier reste par le second reste, et soit le quotient γ ; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce qu'il se présente une division qui se fasse sans reste, ce qui doit arriver ici, et vous aurez la fraction continue*

$$\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

Appliquons cette règle au développement en fraction continue de la fraction

$$\frac{b + b' + b'' + b''' + \text{etc.}}{a + a' + a'' + a''' + \text{etc.}}$$

dont les deux termes sont des suites infinies : on cherchera le quotient

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + b''' + \text{etc.}} =$$

$$\frac{a}{b} + \frac{\left(a' - \frac{ab'}{b}\right) + \left(a'' - \frac{ab''}{b}\right) + \left(a''' - \frac{ab'''}{b}\right) + \text{etc.}}{b \quad + \quad b' \quad + \quad b'' \quad + \text{etc.}}$$

et posant

$$a' - \frac{ab'}{b} = c,\ a'' - \frac{ab''}{b} = c',\ a''' - \frac{ab'''}{b} = c'', \text{ etc.}$$

on aura le second quotient

$$\frac{b + b' + b'' + b''' + \text{etc.}}{c + c' + c'' + c''' + \text{etc.}} =$$

$$\frac{b}{c} + \frac{\left(b' - \frac{bc'}{c}\right) + \left(b'' - \frac{bc''}{c}\right) + \left(b''' - \frac{bc'''}{c}\right) + \text{etc.}}{c \quad + \quad c' \quad + \quad c'' \quad + \text{etc.}}$$

et faisant

$$b' - \frac{bc'}{c} = d;\ b'' - \frac{bc''}{c} = d';\ b''' - \frac{bc'''}{c} = d'', \text{ etc.}$$

on aura le troisième quotient

$$\frac{c + c' + c'' + c''' + \text{etc.}}{d + d' + d'' + d''' + \text{etc.}}$$

$$\frac{c}{d} + \frac{\left(c' - \frac{cd'}{d}\right) + \left(c'' - \frac{cd''}{d}\right) + \left(c''' - \frac{cd'''}{d}\right) + \text{etc.}}{d \quad + \quad d' \quad + \quad d'' \quad + \text{etc.}}$$

en sorte que

$$\frac{b+b'+b''+b'''+\text{etc.}}{a+a'+a''+a'''+\text{etc.}}=\cfrac{1}{\frac{a}{b}+\cfrac{1}{\frac{b}{c}+\cfrac{1}{\frac{c}{d}+\cfrac{1}{\frac{d}{e}+\cfrac{1}{\frac{e}{f}+\text{etc.}}}}}}$$

et on aura pour déterminer les quantités c, d, e, f etc. les équations

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
c=a'-\frac{ab'}{b} & & & & & \\
c'=a''-\frac{ab''}{b} & d=b'-\frac{bc'}{c} & & & & \\
c''=a'''-\frac{ab'''}{b} & d'=b''-\frac{bc''}{c} & e=c'-\frac{cd'}{d} & & & \\
c'''=a^{IV}-\frac{ab^{IV}}{b} & d''=b'''-\frac{bc'''}{c} & e'=c''-\frac{cd''}{d} & f=d'-\frac{de'}{e} & & \\
c^{IV}=a^{V}-\frac{ab^{V}}{b} & d'''=b^{IV}-\frac{bc^{IV}}{c} & e''=c'''-\frac{cd'''}{d} & f=d''-\frac{de''}{e} & g=e'-\frac{ef'}{f} & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

Appliquons cette méthode au développement en fraction continue de l'expression $\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}$: on trouvera après avoir développé $(y^2-1)^{\frac{1}{2}}$, et comparé avec la proposée

$$b=x,\ b'=0,\ b''=0,\ b'''=0,\ \text{etc.}$$
$$a=y,\ a'=-\tfrac{1}{2}y^{-1},\ a''=-\tfrac{1}{8}y^{-3},\ a'''=-\tfrac{1}{16}y^{-5};\ \ldots$$
$$a^{IV}=-\tfrac{5}{128}y^{-7};\ a^{V}=-\tfrac{7}{256}y^{-9},\ \text{etc.}$$

d'où résultent

$$c=-\tfrac{1}{2}y^{-1};\ d=-\tfrac{1}{4}xy^{-2};\ e=\tfrac{1}{8}y^{-3};\ f=\tfrac{1}{16}xy^{-4};\ \text{etc.}$$

et faisant ces substitutions dans l'expression générale de la fraction continue, on trouve d'abord

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}=\cfrac{1}{\frac{y}{x}+\cfrac{1}{\frac{x}{-\frac{1}{2}y^{-1}}+\cfrac{1}{\frac{-\frac{1}{2}y^{-1}}{-\frac{1}{4}xy^{-2}}+\cfrac{1}{\frac{-\frac{1}{4}xy^{-2}}{\frac{1}{8}y^{-3}}+\cfrac{1}{\frac{\frac{1}{8}y^{-3}}{\frac{1}{16}xy^{-4}}+\text{etc.}}}}}}$$

et, toutes réductions faites, en donnant la plus grande attention aux signes, on obtient

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}=\cfrac{x}{y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y}\ \text{etc.}}}}}$$

Prenons pour seconde application la série

$$\frac{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\text{etc.}}{1+0+0+0+\text{etc.}}$$

qui représente, comme nous le verrons par la suite, le développement de $\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, l désignant ici *logarithme hyperbolique*: on a dans ce cas

$$a=1;\ a'=0,\ a''=0,\ a'''=0,\ \text{etc.}$$
$$b=x;\ b'=\tfrac{1}{3}x^3,\ b''=\tfrac{1}{5}x^5,\ b'''=\tfrac{1}{7}x^7,\ \text{etc.}$$
$$c=-\tfrac{1}{3}x^2;\ d=-\tfrac{4}{45}x^3;\ e=-\tfrac{9}{7.5}x^4;\ f=+\tfrac{64}{3.5.7.9}x^5;\ \text{etc.}$$

donc

$$\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ldots$$

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{x}{-\frac{1}{3}x^2}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{1}{3}x^2}{-\frac{4}{15}x^3}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{4}{15}x^3}{\frac{3}{7\cdot5}x^4}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{3}{7\cdot5}x^4}{\frac{64}{3\cdot5\cdot7\cdot9}x^5}+\text{etc.}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{4}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{9}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{16}{\cfrac{9}{x}-\cfrac{25}{\cfrac{11}{x}-\text{etc.}}}}}}}$$

Lorsque $x=\text{tang}\,\varphi$, on a

$$\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\text{tang}\,\varphi}{1-\text{tang}\,\varphi}\right)=\tfrac{1}{2}\,l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$

π désignant la demi-circonférence ; donc

$$\tfrac{1}{2}\,l.\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\ldots\ldots$$

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{\text{tang}\,\varphi}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{\text{tang}\,\varphi}-\cfrac{4}{\cfrac{5}{\text{tang}\,\varphi}-\cfrac{9}{\cfrac{7}{\text{tang}\,\varphi}-\cfrac{16}{\cfrac{9}{\text{tang}\,\varphi}-\cfrac{25}{\cfrac{11}{\text{tang}\,\varphi}-\text{etc.}}}}}}}$$

Nous démontrerons aussi que x étant un arc dont la tangente $=t$, on a

$$x=t-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5-\tfrac{1}{7}t^7+\tfrac{1}{9}t^9-\text{etc.}$$

Digitized by Google

donc

$$a = 1,\ a' = 0,\ a'' = 0,\ a''' = 0,$$
$$b = t,\ b' = -\tfrac{1}{3}t^3,\ b'' = \tfrac{1}{5}t^5;\ b''' = -\tfrac{1}{7}t^7,\ b^{\text{IV}} = \tfrac{1}{9}t^9,\ \text{etc.}$$
$$c = \tfrac{1}{3}t^2,\ d = \tfrac{4}{15}t^3,\ e = \tfrac{9}{35}t^4;\ f = \tfrac{64}{3\cdot5\cdot7\cdot9}t^5;\ \text{etc.}$$

d'où résulte, aprés les réductions,

$$x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\tan x} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\tan x} + \cfrac{4}{\cfrac{5}{\tan x} + \cfrac{9}{\cfrac{7}{\tan x} + \cfrac{16}{\cfrac{9}{\tan x} + \text{etc.}}}}}}$$

On voit donc qu'on pourra résoudre en fraction continue toute expression qu'on saura développer en une série.

10. Pour repasser d'une fraction continue à la fraction ordinaire qui lui a donné naissance, on fera les réductions successives

$$\alpha = \frac{\alpha}{1};\ \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta+1}{\beta};\ \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}} + \frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1};$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta}}} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta};\ \text{etc.}$$

En examinant ces résultats, on découvre facilement que le numérateur de chacune des fractions ainsi formées, est égal à la somme faite du numérateur de la fraction qui précède, multiplié par le nouveau quotient, ou par le dernier quotient introduit, et du numérateur de l'antépénultième fraction, et que le dénominateur de chaque fraction se forme suivant la même loi, en sorte que $\frac{P^{\circ}}{Q^{\circ}}$ et $\frac{P}{Q}$ étant deux fractions con-

sécutives, et μ le nouveau quotient introduit, ou le dernier des quotiens qui entrent dans la fraction $\frac{P'}{Q'}$ qui suit immédiatement $\frac{P}{Q}$, on aura.

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{P\mu+P^{\circ}}{Q\mu+Q^{\circ}}$$

Pour démontrer que cette loi a lieu dans toute l'étendue de la fraction continue, supposons qu'elle ait été vérifiée jusqu'à un certain quotient μ : soit $\frac{P'}{Q'}$ la fraction correspondante, $\frac{P}{Q}$ la fraction qui précède, et $\frac{P^{\circ}}{Q^{\circ}}$ l'antépénultième fraction, on aura

$$P'=P\mu+P^{\circ}$$
$$Q'=Q\mu+Q^{\circ}.$$

Si on considère le quotient qui suit immédiatement le quotient μ, et que $\frac{P''}{Q''}$ soit la valeur de la fraction continue calculée jusqu'au quotient μ' inclusivement, l'expression analytique de $\frac{P''}{Q''}$ sera ce que devient celle de $\frac{P'}{Q'}$ lorsqu'à la place de μ on écrit $\mu+\frac{1}{\mu'}$; donc

$$\frac{P''}{Q''}=\frac{P\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+P^{\circ}}{Q\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+Q^{\circ}}=\frac{(P\mu+P^{\circ})\mu'+P}{(Q\mu+Q^{\circ})\mu'+Q}=\frac{P'\mu'+P}{Q'\mu'+Q}$$

Donc la fraction $\frac{P''}{Q''}$ se déduira des deux précédentes $\frac{P'}{Q'}$ et $\frac{P}{Q}$ et du quotient μ' répondant à $\frac{P''}{Q''}$ suivant la loi

$$P'' = P'\mu' + P$$
$$Q'' = Q'\mu' + Q.$$

Cette loi de formation aura donc lieu dans toute l'étendue de la fraction.

Ayant donc écrit par ordre les quotiens α, β, γ, δ, etc. on formera facilement les fractions correspondantes de cette manière :

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \frac{1}{0}; & \frac{\alpha}{1}; & \frac{\alpha\beta+1}{\beta}; & \frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}; & \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta}; \text{etc.} \end{array}$$

où chaque numérateur se trouve en multipliant le précédent par la lettre écrite au-dessus, et ajoutant ce produit à l'antépenultième, et procédant de la même manière pour composer le dénominateur. Pour que cette loi de formation puisse valoir à partir de la seconde fraction inclusivement, on écrit $\frac{1}{0}$ pour première fraction, quoique celle-ci ne soit pas une portion de la fraction continue. On aura donc, en représentant par A, B, C, etc. les numérateurs de ces fractions successives, et par A', B', C' etc. les dénominateurs des mêmes fractions,

$A = \alpha$	$A' = 1$
$B = A\beta + 1$	$B' = A'\beta$
$C = B\gamma + A$	$C' = B'\gamma + A'$
$D = C\delta + B$	$D' = C'\delta + B'$
etc.	etc.

Les fractions résultantes $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, etc. ont été nommées fractions convergentes, parce que, comme nous le verrons bientôt, chacune d'elles approche plus que celle qui la précède de la valeur exacte de la fraction continue.

Si la quantité a qu'on veut développer en fraction con-

tinue, est une fraction rationnelle $\frac{V}{V'}$, il est évident que cette fraction sera toujours la dernière dans la série des fractions convergentes; car, dans ce cas, la fraction continue sera terminée : mais si la quantité a est irrationnelle, la fraction continue se prolongeant sans jamais s'arrêter, la suite des fractions convergentes ne s'arrêtera pas non plus.

11. *Les fractions convergentes* $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, *etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la valeur totale de la fraction continue.* En effet, à ne considérer que la première fraction $\frac{\alpha}{1}$, on aura, en désignant par x la totalité de la fraction continue

$$x > \frac{\alpha}{1}.$$

Si l'on prend $\alpha + \frac{1}{6}$, comme le dénominateur 6 est plus petit que le dénominateur $6 + \frac{1}{\gamma} +$ etc., on aura,

$$x < \alpha + \frac{1}{6}.$$

En se bornant à $\alpha + \frac{1}{6 + \frac{1}{\gamma}}$, comme le dénominateur γ est plus petit que le véritable, la fraction $\frac{1}{\gamma}$ sera trop grande, la fraction $\frac{1}{6 + \frac{1}{\gamma}}$ sera trop petite, et la somme $\alpha + \frac{1}{6 + \frac{1}{\gamma}}$ sera trop petite, en sorte que

$$x > \alpha + \frac{1}{6 + \frac{1}{\gamma}}.$$

et ainsi de suite alternativement : donc la valeur de x est toujours comprise entre deux de ces fractions consécutives.

12. *Si on multiplie en croix les termes de deux fractions convergentes consécutives* $\frac{P^{\circ}}{Q^{\circ}}, \frac{P}{Q}$, *on aura toujours la différence des produits*

$$PQ^{\circ} - P^{\circ}Q = \pm 1;$$

savoir $+1$, *si la fraction* $\frac{P}{Q}$ *est du nombre des fractions plus grandes que* x, *ou si elle est de rang impair, la fraction* $\frac{1}{0}$ *étant la première, et* -1 *si elle est une fraction plus petite ou de rang pair.*

En effet, si l'on considère trois fractions consécutives

$$\frac{P^{\circ}}{Q^{\circ}}, \frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$$

et que μ soit le quotient placé au-dessus de $\frac{P}{Q}$, ou le quotient correspondant à $\frac{P'}{Q'}$, on aura, d'après la loi démontrée,

$$P' = P\mu + P^{\circ}$$
$$Q' = Q\mu + Q^{\circ};$$

d'où résulte

$$P'Q - PQ' = P^{\circ}Q - PQ^{\circ} = -(PQ^{\circ} - P^{\circ}Q)$$

On aurait de même, en représentant par $\frac{'P}{'Q}$ la fraction qui précède immédiatement $\frac{P^{\circ}}{Q^{\circ}}$,

$$PQ^{\circ} - P^{\circ}Q = {}'PQ^{\circ} - {}'QP^{\circ} = -(P^{\circ\prime}Q - {}'PQ^{\circ})$$

et ainsi de suite, en remontant jusqu'aux deux premières fractions $\frac{1}{0}$ et $\frac{\alpha}{1}$, qui sont comprises dans la loi, et pour les-

quelles la différence analogue est $\alpha \times 0 - 1 \times 1 = -1$; en sorte que

$$BA' - B'A = +1$$
$$CB' - C'B = -1.$$

On peut déduire de cette propriété plusieurs conséquences importantes: on en conclura d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$, etc. sont déjà réduites à la plus simple expression, car si C et C', par exemple, avaient un commun diviseur autre que l'unité, il faudrait, d'après la propriété

$$BC' - B'C = +1,$$

que l'unité fût aussi divisible par ce commun diviseur; conclusion qu'on déduirait de la même égalité à l'égard de $\frac{B}{B'}$.

La propriété que nous venons de démontrer, trouve son application dans l'analyse indéterminée, ainsi qu'on le verra dans l'un des chapitres suivans.

13. Évaluons maintenant la différence entre une fraction quelconque et la valeur x de la fraction continue totale. Pour cela soient toujours $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ deux fractions consécutives, et μ le quotient qui correspond à $\frac{P'}{Q'}$; en sorte que

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P\mu + P^\circ}{Q\mu + Q^\circ}:$$

si, à la place de μ, on écrit le reste de la fraction continue, à partir de μ inclusivement, on aura, en désignant ce reste par y, et la totalité de la fraction continue par x,

$$x = \frac{Py + P^\circ}{Qy + Q^\circ},$$

d'où on déduit

$$x - \frac{P}{Q} = \frac{P^\circ Q - P Q^\circ}{Q(Qy + Q^\circ)} = \mp \frac{1}{Q^\circ(Qy + Q^\circ)}$$

et

$$x - \frac{P^\circ}{Q^\circ} = \frac{(PQ^\circ - P^\circ Q)y}{Q^\circ(Qy + Q^\circ)} = \pm \frac{y}{Q^\circ(Qy + Q^\circ)}.$$

Les différences $x - \frac{P}{Q}$ et $x - \frac{P^\circ}{Q^\circ}$ sont donc toujours de signes contraires, et conséquemment la valeur de x est comprise entre deux fractions consécutives, propriété déjà démontrée plus haut.

Soit μ le nombre entier immédiatement moindre que y, en sorte qu'on ait

$$y > \mu \text{ et } y < \mu + 1;$$

on aura aussi

$$Qy + Q^\circ > Q\mu + Q^\circ \text{ et } Qy + Q^\circ < Q(\mu + 1) + Q^\circ,$$

donc

$$x - \frac{P}{Q} < \mp \frac{1}{Q(Q\mu + Q^\circ)} \text{ ou } < \mp \frac{1}{QQ'},$$

et

$$x - \frac{P}{Q} > \mp \frac{1}{Q[Q(\mu+1) + Q^\circ]} \text{ ou } > \mp \frac{1}{Q(Q' + Q)}.$$

14. *Ainsi l'erreur qu'on commettra en prenant une fraction en place de la fraction continue totale, sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette fraction et de la fraction immédiatement consécutive, mais plus grande que l'unité divisée par la somme du même produit et du carré du dénominateur de la fraction sur laquelle on opère.*

Or les quotiens α, β, γ, etc. étant des nombres entiers et positifs, on a

$$Q^\circ < Q,\ Q < Q', \text{ donc } QQ' > Q^2 \text{ et } \frac{1}{QQ'} < \frac{1}{Q^2} \text{ etc.}$$

donc, à plus forte raison,

$$x - \frac{P}{Q} < \pm \frac{1}{QQ}.$$

15.

15. *Donc l'erreur commise en prenant une fraction quelconque pour la fraction totale, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette fraction.*

Des équations trouvées précédemment

$$x - \frac{P}{Q} = \mp \frac{1}{Q(Qy + Q^\circ)}$$
$$x - \frac{P^\circ}{Q^\circ} = \pm \frac{y}{Q^\circ(Qy + Q^\circ)},$$

on déduit

$$P - Qx = \pm \frac{1}{Qy + Q^\circ},$$
$$-P^\circ + Q^\circ x = \pm \frac{y}{Qy + Q^\circ}$$

d'où

$$\frac{P - Qx}{-P^\circ + Q^\circ x} = \frac{1}{y}:$$

or y, par sa définition, est un nombre plus grand que l'unité, donc

$$\frac{P - Qx}{Q^\circ x - P^\circ} < 1, \text{ d'où } P - Qx < Q^\circ x - P^\circ,$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{P}{Q} - x < x - \frac{P^\circ}{Q^\circ}.$$

16. *Donc la différence entre la fraction continue totale* x *et une fraction quelconque, est moindre que la différence entre* x *et la fraction qui précède immédiatement celle-là.* Cette propriété a fait donner à ces fractions successives $\frac{P^\circ}{Q^\circ}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, etc. le nom de fractions convergentes.

17. *Soit $\frac{M}{N}$ une fraction dont le dénominateur N soit moindre que le dénominateur Q d'une des fractions convergentes*

$\frac{P}{Q}$, je dis que *la fraction* $\frac{P}{Q}$ *exprimera plus exactement la valeur de* x *que la fraction* $\frac{M}{N}$.

La proposition se réduit donc à faire voir que la fraction $\frac{M}{N}$ ne peut être intercalée entre deux fractions consécutives $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$ entre lesquelles se trouve la fraction totale x.

Pour que la fraction $\frac{M}{N}$ se trouvât entre $\frac{P}{Q}$ et x, il faudrait qu'on eût

$$\frac{P}{Q} - \frac{M}{N} < \frac{P}{Q} - x, \text{ et, } \textit{à fortiori}, \ \frac{P}{Q} - \frac{M}{N} < \frac{1}{Q^2}$$

abstraction faite du signe, ou qu'en réduisant le premier membre au dénominateur QN, on eût

$$\frac{PN - QM}{QN} < \frac{1}{Q^2}.$$

Or P, Q, M et N étant des nombres entiers, le numérateur $PN - QM$ ne peut être, abstraction faite du signe, un nombre moindre que l'unité : on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$N < Q \text{ et } NQ < Q^2;$$

donc on aura, au contraire,

$$\frac{PN - QM}{QN} > \frac{1}{Q^2},$$

donc $\frac{M}{N}$ ne peut se trouver entre $\frac{P}{Q}$ et x. Pour que $\frac{M}{N}$ tombât entre x et $\frac{P'}{Q'}$, il faudrait qu'on eût

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{M}{N} < \frac{P'}{Q'} - x < \frac{1}{Q'^2}$$

ou

$$\frac{P'N - Q'M}{Q'N} < \frac{1}{Q'^2};$$

ce qui ne peut avoir lieu, parce qu'encore le numérateur ne peut être, abstraction faite du signe, < 1, et parce que N est, à plus forte raison, $< Q'$. La fraction $\frac{M}{N}$ ne peut-être, *à fortiori*, supposée entre les deux fractions $\frac{P'}{Q'}$ et $\frac{P''}{Q''}$, $\frac{P''}{Q''}$ et $\frac{P'''}{Q'''}$, etc.; donc elle ne pourra exprimer la valeur de x plus exactement que la fraction $\frac{P}{Q}$.

18. *Donc chaque fraction convergente exprime la valeur de x plus exactement que toute autre fraction dont le dénominateur serait moindre que celui de la fraction qu'on considère.*

19. Les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ etc...... $\frac{P^o}{Q^o}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ etc. ont été appelées fractions principales, parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur totale x de la fraction continue. On a vu qu'elles étaient alternativement plus petites et plus grandes que x; ainsi on pourra les séparer en deux classes

$$\frac{A}{A'},\quad \frac{C}{C'},\quad \frac{E}{E'},\ \text{etc.}$$

$$\frac{B}{B'},\quad \frac{D}{D'},\quad \frac{F}{F'},\ \text{etc.}$$

La première sera composée de fractions toutes plus petites que x et qui iront en augmentant vers x; la seconde, de fractions toutes plus grandes que x, mais qui iront en diminuant vers cette quantité.

Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier. Dans la première, on aura

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou, en général, s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs, comme nous l'avons démontré précédemment. De plus, comme les fractions dont il s'agit, sont toutes plus petites que la vraie valeur de x, et que la fraction $\frac{B}{B'}$ est plus grande, il est évident que chacune de ces fractions approchera plus de x que de $\frac{B}{B'}$: or on trouve

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{C'B'};$$

donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on pourra prouver de la même manière que ci-dessus qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne pourra tomber entre l'une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$ etc. et la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur n est plus petit que

celui de la même fraction, d'où il suit *que chacune de ces fractions approche plus de la valeur x que ne pourrait en approcher toute autre fraction moindre que x et qui aurait un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui serait conçue en termes plus simples.*

Nous n'avons considéré que les fractions intermédiaires entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$: il en sera de même des fractions intermédiaires entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ et $\frac{G}{G'}$, si ε, η etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$ tout ce que nous venons de dire relativement à la première série $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ etc. de sorte que si les nombres δ, ζ, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre $\frac{B}{B'}$ et $\frac{D}{D'}$ entre $\frac{D}{D'}$ et $\frac{F}{F'}$ etc. différentes fractions intermédiaires toutes plus grandes que x, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité x plus exactement que ne pourrait faire toute autre fraction plus grande que x et qui serait conçue en termes plus simples.

De plus si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$ etc. jusqu'à $\frac{\delta A+1}{\delta} = \frac{B}{B'}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions intermédiaires. De cette manière, on aura ces deux suites complettes de fractions convergentes vers la quantité x :

C 4

Fractions croissantes et plus petites que x

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B+A}{B'+A'},\ \frac{2B+A}{2B'+A'}\cdots\cdots\frac{(\gamma-1)B+A}{(\gamma-1)B'+A'}$$

$$\frac{C}{C'},\ \frac{D+C}{D'+C'},\ \frac{2D+C}{2D'+C'}\cdots\cdots\frac{(\varepsilon-1)D+C}{(\varepsilon-1)D'+C'}$$

$$\frac{E}{E'},\ \frac{F+E}{F'+E'}\ \text{etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que x

$$\frac{A+1}{1},\ \frac{2A+1}{2},\ \frac{3A+1}{3}\cdots\cdots\frac{(\beta-1)A+1}{\beta-1}$$

$$\frac{B}{B'},\ \frac{C+B}{C'+B'}\ \frac{2C+B}{2C'+B'}\cdots\cdots\frac{(\delta-1)C+B}{(\delta-1)C'+B'}$$

$$\frac{D}{D'},\ \frac{E+D}{E'+D'}\ \text{etc.}$$

Si la quantité x est irrationnelle, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions principales $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ etc. va d'elle-même à l'infini.

Les fractions intermédiaires sont appelées fractions secondaires.

Mais si le nombre x est rationnel et égal à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, on a vu que la série des fractions principales sera terminée, et que la dernière fraction de cette série sera la fraction $\frac{V}{V'}$; donc cette fraction terminera nécessairement aussi l'une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra aller toujours à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions principales, et la série des fractions plus grandes que x se trouvera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus

petites que x, se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$ qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur ϵ qui devrait suivre le dernier dénominateur δ, sera ∞ (n°. 8), de sorte que la fraction $\frac{E}{E'}$ qui suivrait $\frac{D}{D'}$, dans la suite des fractions principales, serait $\frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'}$: or, par la loi des fractions intermédiaires, il est clair qu'à cause de $\epsilon = \infty$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$ une infinité de fractions intermédiaires qui seront

$$\frac{D+C}{D'+C'}, \quad \frac{2D+C}{2D'+C'}, \quad \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ etc.}$$

Ainsi, dans ce cas, on pourra après la fraction $\frac{C}{C'}$ placer encore les fractions intermédiaires dont nous parlons.

20. On peut donc résoudre cette question : *une fraction exprimée par des grands nombres, étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples.*

D'après la théorie précédente, le problême sera résolu en réduisant la fraction proposée en fraction continue, puis en formant les fractions convergentes et intercalant des fractions secondaires. (*Voyez les additions par Lagrange à l'Algèbre d'Euler.*)

21. Lorsqu'on développe une quantité en fraction continue, il arrive quelquefois que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre : dans ce cas, la fraction continue est dite *périodique*, et elle peut toujours être considérée

comme la racine d'une équation du second degré. Soit la fraction périodique

$$x = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}:$$

puisque le nombre des fractions intégrantes est illimité, il est clair qu'on peut substituer x à l'ensemble des fractions intégrantes qui suivent la première, en sorte qu'on aura

$$x = \frac{1}{p+x}, \text{ d'où } x^2 + px = 1 \text{ et } x = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}.$$

La fraction continue ci-dessus servira donc à trouver la racine carrée du nombre $\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$, puisqu'on a

$$\frac{\sqrt{p^2+4}}{2} = \frac{p}{2} + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}$$

En faisant $p = 2$, on obtient

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}$$

Soit encore la fraction

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}}$$

dont les dénominateurs reviennent périodiquement de deux en deux, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}};$$

d'où résulte l'équation du second degré

$$qx^2 - pqx - p = 0.$$

Il en serait de même, si la période était composée d'un plus grand nombre de termes; c'est-à-dire, qu'on serait toujours conduit pour la détermination de x à une équation du second degré. Il peut arriver aussi que la fraction continue soit irrégulière dans ses premiers termes, et qu'elle ne devienne périodique qu'à une certaine distance du commencement. Soit, par exemple, la fraction

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}}}$$

et désignons par y la partie périodique, ou supposons

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}, \text{ d'où } y = \frac{x-p}{1-q(x-p)}$$

mais $$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}, \text{ d'où } sy^2 - rsy - r = 0;$$

et remplaçant y par sa valeur, il viendra

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)(1-q(x-p)) - r(1-q(x-p))^2 = 0$$

équation qui, développée et ordonnée par rapport aux puissances de x, montera au second degré. En la résolvant et égalant la valeur de x à la fraction continue qu'elle représente, on aura le développement en fraction continue de la racine quarrée des nombres représentés par la formule qui se trouvera sous le radical.

Soit la fraction périodique

$$x = a + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{ect.}}}}}, \text{ d'où } x - a = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}}$$

on en déduira

$$x - a = \frac{p}{q + x - a}; \text{ donc } x = \frac{2a - q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

et conséquemment

$$\frac{\sqrt{q^2 + 4p} - q}{2} = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}$$

ou, faisant $q = 2a$,

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \text{etc.}}}$$

Si on réduit en fraction ordinaire la portion de fraction continue correspondante à sept périodes, on trouvera

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \frac{(2a)^7 p + 5\,(2a)^5 p^2 + 7\,(2a)^3 p^3 + 3\,(2a)^4 p^4}{(2a)^8 + 6\,(2a)^6 p + 11\,(2a)^4 p^2 + 7\,(2a)^2 p^3 + p^4}$$

Proposons-nous d'extraire, par approximation, la racine quarrée de 2 : nous ferons dans la formule précédente $a = 1$, $p = 1$, ce qui donnera

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{128 + 5.32 + 7.8 + 3.2}{256 + 6.64 + 11.16 + 7.4 + 1} = 1 + \frac{70}{69}$$

résultat exact, à moins d'un cent millième près.

Qu'il s'agisse d'extraire la racine quarrée de 97 : on fera dans la formule $a = 10$ et $p = 97 - 100 = -1$: donc

$$\sqrt{97} = 10 - \frac{369750740}{24463764481} = 9,8488.$$

S'il s'agit d'extraire la racine quarrée de $m^2 + n^2$, il faut faire dans la formule

$$a = m + n,\ p = m^2 + n^2 - m^2 - 2mn - n^2 = -2mn$$

CHAPITRE IV.

Méthode d'approximation des racines des équations numériques.

22. Nous avons déjà donné (Iere sect. ch. XXVII) une méthode pour approcher des racines d'une équation numérique : nous allons en faire connaître une autre pour réduire ces racines en fractions continues ; en sorte qu'au moyen de la théorie précédente, nous pourrons assigner des fractions alternativement plus petites et plus grandes que chacune des racines, mais qui en approcheront de plus en plus.

Soit, à cet effet, l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + V = 0, \ldots (M)$$

et supposons qu'on ait trouvé par les méthodes données (Iere sect. ch. XXVI) les valeurs entières immédiatement en-dessous des racines cherchées ; si p est l'une de ces valeurs, en sorte qu'on ait

$$x > p \text{ et } x < p + 1;$$

on posera

$$x = p + \frac{1}{y},$$

où y est un nombre plus grand que l'unité ; et substituant pour x cette valeur dans la proposée, on trouvera, après avoir multiplié l'équation résultante par y^m,

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + D'y^{m-3} + \text{etc.} \ldots = 0 \ldots (N).$$

équation qui aura nécessairement, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité. Soit q la valeur entière en dessous de y, on fera

$$y = q + \frac{1}{z},$$

$$\frac{C}{C'}-\frac{A}{A'}=\frac{CA'-AC'}{A'C'}=\frac{A'(B\gamma+A)-A(B'\gamma+A')}{A'C'}=\frac{\gamma}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'}-\frac{C}{C'}=\frac{EC'-E'C}{C'E'}=\frac{C'(D\epsilon+C)-C(D'\epsilon+C')}{C'E'}=\frac{\epsilon}{C'E'}$$

etc.

Dans la seconde on aura

$$\frac{B}{B'}-\frac{D}{D'}=\frac{BD'-B'D}{B'D'}=\frac{B'(C\delta+B')-B'(C\delta+B)}{B'D'}=\frac{\delta}{B'D'}$$

$$\frac{D}{D'}-\frac{F}{F'}=\frac{DF'-FD'}{F'D'}=\frac{D(E'\zeta+D')-D'(E\zeta+D)}{F'D'}=\frac{\zeta}{F'D'}$$

etc.

Si les nombres γ, δ, ϵ, etc. sont tous égaux à l'unité, il sera impossible qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des séries précédentes, il se trouve aucune autre fraction dont le dénominateur tombe entre ceux de ces fractions, ou, en général, dont le dénominateur soit moindre que le plus grand de deux dénominateurs : en effet, représentant par $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ deux des fractions consécutives ci-dessus, on a

$$\frac{b}{b'}-\frac{a}{a'}=\frac{1}{a'b'};$$

donc, pour que la fraction $\frac{m}{n}$ tombât entre $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$, il faudrait qu'on eût

$$\frac{a'b-ab'}{a'b'}=\frac{1}{a'b'}>\frac{m}{n}-\frac{a}{a'}\text{ ou }>\frac{ma'-na}{na'};$$

or le numérateur $ma'-na$ ne peut être, abstraction faite du signe, plus petit que l'unité ; d'ailleurs n est, par hypothèse, plus petit que b', donc on ne peut avoir

$$\frac{ma' - na}{na'} < \frac{1}{a'b'}.$$

Mais il n'en sera plus ainsi lorsque les nombres γ, δ, ε etc. seront différens de l'unité : car supposons, par exemple, que γ soit 4, on aura

$$C = 4B + A$$
$$C' = 4B' + A',$$

et on pourra, entre les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, insérer les trois fractions intermédiaires

$$\frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}.$$

Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante par différences égales depuis A' jusqu'à C', et les numérateurs depuis A jusqu'à C, et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, en sorte qu'il serait maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}, \frac{4B+A}{4B'+A'} = \frac{C}{C'}$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions; car si l'on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA' - AB' = 1$

$$\frac{A+B}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$
$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$
$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$
$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')C'}:$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou, en général, s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs, comme nous l'avons démontré précédemment. De plus, comme les fractions dont il s'agit, sont toutes plus petites que la vraie valeur de x, et que la fraction $\frac{B}{B'}$ est plus grande, il est évident que chacune de ces fractions approchera plus de x que de $\frac{B}{B'}$: or on trouve

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{C'B'};$$

donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on pourra prouver de la même manière que ci-dessus qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne pourra tomber entre l'une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$ etc. et la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur n est plus petit que

celui de la même fraction, d'où il suit *que chacune de ces fractions approche plus de la valeur x que ne pourrait en approcher toute autre fraction moindre que x et qui aurait un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui serait conçue en termes plus simples.*

Nous n'avons considéré que les fractions intermédiaires entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$: il en sera de même des fractions intermédiaires entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ et $\frac{G}{G'}$, si ε, η etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$ tout ce que nous venons de dire relativement à la première série $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ etc. de sorte que si les nombres δ, ζ, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre $\frac{B}{B'}$ et $\frac{D}{D'}$ entre $\frac{D}{D'}$ et $\frac{F}{F'}$ etc. différentes fractions intermédiaires toutes plus grandes que x, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité x plus exactement que ne pourrait faire toute autre fraction plus grande que x et qui serait conçue en termes plus simples.

De plus si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$ etc. jusqu'à $\frac{\delta A+1}{\delta} = \frac{B}{B'}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions intermédiaires. De cette manière, on aura ces deux suites complettes de fractions convergentes vers la quantité x :

Fractions croissantes et plus petites que x

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B+A}{B'+A'},\ \frac{2B+A}{2B'+A'} \cdots\cdots \frac{(\gamma-1)B+A}{(\gamma-1)B'+A'}$$

$$\frac{C}{C'},\ \frac{D+C}{D'+C'},\ \frac{2D+C}{2D'+C'} \cdots\cdots \frac{(\varepsilon-1)D+C}{(\varepsilon-1)D'+C'}$$

$$\frac{E}{E'},\ \frac{F+E}{F'+E'}\ \text{etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que x

$$\frac{A+1}{1},\ \frac{2A+1}{2},\ \frac{3A+1}{3} \cdots\cdots \frac{(\beta-1)A+1}{\beta-1}$$

$$\frac{B}{B'},\ \frac{C+B}{C'+B'},\ \frac{2C+B}{2C'+B'} \cdots\cdots \frac{(\delta-1)C+B}{(\delta-1)C'+B'}$$

$$\frac{D}{D'},\ \frac{E+D}{E'+D'}\ \text{etc.}$$

Si la quantité x est irrationnelle, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions principales $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ etc. va d'elle-même à l'infini.

Les fractions intermédiaires sont appelées fractions secondaires.

Mais si le nombre x est rationnel et égal à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, on a vu que la série des fractions principales sera terminée, et que la dernière fraction de cette série sera la fraction $\frac{V}{V'}$; donc cette fraction terminera nécessairement aussi l'une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra aller toujours à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions principales, et la série des fractions plus grandes que x se trouvera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus

petites que x, se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$ qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur ε qui devrait suivre le dernier dénominateur δ, sera ∞ (n°. 8), de sorte que la fraction $\frac{E}{E'}$ qui suivrait $\frac{D}{D'}$, dans la suite des fractions principales, serait $\frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'}$: or, par la loi des fractions intermédiaires, il est clair qu'à cause de $\varepsilon = \infty$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$ une infinité de fractions intermédiaires qui seront

$$\frac{D+C}{D'+C'},\quad \frac{2D+C}{2D'+C'},\quad \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ etc.}$$

Ainsi, dans ce cas, on pourra après la fraction $\frac{C}{C'}$ placer encore les fractions intermédiaires dont nous parlons.

20. On peut donc résoudre cette question : *une fraction exprimée par des grands nombres, étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples.*

D'après la théorie précédente, le problême sera résolu en réduisant la fraction proposée en fraction continue, puis en formant les fractions convergentes et intercalant des fractions secondaires. (*Voyez les additions par Lagrange à l'Algèbre d'Euler.*)

21. Lorsqu'on développe une quantité en fraction continue, il arrive quelquefois que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre : dans ce cas, la fraction continue est dite *périodique*, et elle peut toujours être considérée

comme la racine d'une équation du second degré. Soit la fraction périodique

$$x = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}:$$

puisque le nombre des fractions intégrantes est illimité, il est clair qu'on peut substituer x à l'ensemble des fractions intégrantes qui suivent la première, en sorte qu'on aura

$$x = \frac{1}{p+x}, \text{ d'où } x^2 + px = 1 \text{ et } x = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

La fraction continue ci-dessus servira donc à trouver la racine carrée du nombre $\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$, puisqu'on a

$$\frac{\sqrt{p^2+4}}{2} = \frac{p}{2} + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}$$

En faisant $p = 2$, on obtient

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}$$

Soit encore la fraction

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}}$$

dont les dénominateurs reviennent périodiquement de deux en deux, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}};$$

d'où résulte l'équation du second degré

$$qx^2 - pqx - p = 0.$$

Il en serait de même, si la période était composée d'un plus grand nombre de termes; c'est-à-dire, qu'on serait toujours conduit pour la détermination de x à une équation du second degré. Il peut arriver aussi que la fraction continue soit irrégulière dans ses premiers termes, et qu'elle ne devienne périodique qu'à une certaine distance du commencement. Soit, par exemple, la fraction

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$$

et désignons par y la partie périodique, ou supposons

$$y = r + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$$

on aura

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{y}, \text{ d'où } y = \frac{x-p}{1-q(x-p)}$$

mais $y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}$, d'où $sy^2 - rsy - r = 0$;

et remplaçant y par sa valeur, il viendra

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)(1-q(x-p)) - r(1-q(x-p))^2 = 0$$

équation qui, développée et ordonnée par rapport aux puissances de x, montera au second degré. En la résolvant et égalant la valeur de x à la fraction continue qu'elle représente, on aura le développement en fraction continue de la racine quarrée des nombres représentés par la formule qui se trouvera sous le radical.

Soit la fraction périodique

$$x = a + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{ect.}}}}}, \text{ d'où } x - a = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}}$$

on en déduira

$$x - a = \frac{p}{q + x - a}; \text{ donc } x = \frac{2a - q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

et conséquemment

$$\frac{\sqrt{q^2 + 4p} - q}{2} = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}$$

ou, faisant $q = 2a$,

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \text{etc.}}}$$

Si on réduit en fraction ordinaire la portion de fraction continue correspondante à sept périodes, on trouvera

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \frac{(2a)^7 p + 5\,(2a)^5 p^2 + 7\,(2a)^3 p^3 + 3\,(2a)\,p^4}{(2a)^8 + 6\,(2a)^6 p + 11\,(2a)^4 p^2 + 7\,(2a)^2 p^3 + p^4}$$

Proposons-nous d'extraire, par approximation, la racine quarrée de 2 : nous ferons dans la formule précédente $a = 1$, $p = 1$, ce qui donnera

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{128 + 5.32 + 7.8 + 3.2}{256 + 6.64 + 11.16 + 7.4 + 1} = 1 + \frac{70}{69}$$

résultat exact, à moins d'un cent millième près.

Qu'il s'agisse d'extraire la racine quarrée de 97 : on fera dans la formule $a = 10$ et $p = 97 - 100 = -1$: donc

$$\sqrt{97} = 10 - \frac{3697307\,40}{2446376448\,1} = 9,8488.$$

S'il s'agit d'extraire la racine quarrée de $m^2 + n^2$, il faut faire dans la formule

$$a = m + n,\ p = m^2 + n^2 - m^2 - 2mn - n^2 = -2mn$$

CHAPITRE IV.

Méthode d'approximation des racines des équations numériques.

22. Nous avons déjà donné (Iere sect. ch. XXVII) une méthode pour approcher des racines d'une équation numérique : nous allons en faire connaître une autre pour réduire ces racines en fractions continues ; en sorte qu'au moyen de la théorie précédente, nous pourrons assigner des fractions alternativement plus petites et plus grandes que chacune des racines, mais qui en approcheront de plus en plus.

Soit, à cet effet, l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + V = 0, \ldots (M)$$

et supposons qu'on ait trouvé par les méthodes données (Iere sect. ch. XXVI) les valeurs entières immédiatement en-dessous des racines cherchées ; si p est l'une de ces valeurs, en sorte qu'on ait

$$x > p \text{ et } x < p + 1;$$

on posera

$$x = p + \frac{1}{y},$$

où y est un nombre plus grand que l'unité ; et substituant pour x cette valeur dans la proposée, on trouvera, après avoir multiplié l'équation résultante par y^m,

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + D'y^{m-3} + \text{etc} \ldots = 0 \ldots (N)$$

équation qui aura nécessairement, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité. Soit q la valeur entière en dessous de y, on fera

$$y = q + \frac{1}{z},$$

z étant un nombre plus grand que l'unité; substituant dans (N), on aura une équation en z de la forme

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + D''z^{m-3} + \text{etc.}\ldots = 0\ldots(P)$$

laquelle aura nécessairement, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même une valeur entière approchée par défaut, que nous désignerons par r; en sorte qu'on aura

$$z = r + \frac{1}{u}$$

où u désigne un nombre plus grand que l'unité. Substituant dans (P), il viendra une équation en u ayant, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité, et ainsi de suite.

On traitera successivement de la même manière les valeurs entières approchées p', p'', p''', etc., des racines réelles et positives de la proposée, pour approcher davantage de la véritable valeur de chacune d'elles.

Les racines positives et plus grandes que l'unité des transformées (N), (P), etc., seront nécessairement incommensurables, si on a débarrassé la proposée des racines commensurables qu'elle peut contenir. En effet, s'il arrivait qu'un des nombres p, q, r, etc. fût une racine exacte, alors on aurait

$$x = p,\ \text{ou}\ y = q,\ \text{ou}\ z = r,\ \text{etc.}$$

en sorte que l'opération se terminerait : on trouverait donc pour x un nombre commensurable, ce qui est contre l'hypothèse.

Si les nombres p, p', p'', etc., sont tous différens, alors chacune des tranformées (N), (P), etc., n'aura qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité; car si, par exemple, la transformée (N) avait deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que y' et y'', on aurait

$$x = p + \frac{1}{y'}\ \text{et}\ x = p + \frac{1}{y''};$$

de sorte que ces deux valeurs de x auraient la même valeur entière approchée p, ce qui est contre l'hypothèse. Il en serait de même, si la transformée (P), ou l'une des suivantes avait deux racines réelles plus grandes que l'unité : d'où il suit que pour trouver, dans ce cas, les valeurs entières approchées des racines des transformées successives, il suffira de substituer successivement, au lieu de l'inconnue, les nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc. à partir de celui immédiatement moindre que la limite des plus petites racines positives de la transformée sur laquelle on opère, jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats de signes différens.

Si deux valeurs de x ont une même valeur entière approchée p, alors en employant cette valeur, les transformées (N) et (P) etc. auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation dont les racines plus grandes que l'unité aient des valeurs entières approchées différentes ; alors chacune de ces deux valeurs donnera naissance à une suite d'équations transformées dont chacune n'aura plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité. En effet, puisqu'il existe deux valeurs différentes de x, qui ont la même valeur approchée p, il faudra que y dans (N) ait deux valeurs réelles plus grandes que l'unité ; et si ces deux valeurs de y ont la même valeur entière approchée q, il faudra de nouveau qu'en faisant $y = q + \frac{1}{z}$, la transformée en z ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, et ainsi de suite. Mais si les deux valeurs entières approchées de y étaient différentes, alors nommant ces valeurs q et q', on ferait

$$y = q + \frac{1}{z} \text{ et } y = q' + \frac{1}{z},$$

ce qui donnerait lieu à deux transformées telles que (P), dont chacune ne devrait plus avoir qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité : autrement les valeurs de y, au lieu d'être doubles seulement, seraient triples, quadru-

ples, etc. : on serait donc conduit à ces valeurs correspondantes de x

$$x=p+\frac{1}{y'}; x=p+\frac{1}{y''}; x=p+\frac{1}{y'''};$$

ainsi la proposée admettrait plus de deux racines réelles et positives ayant chacune la même valeur entière approchée p; ce qui est contre l'hypothèse. Donc, à partir de la transformée dont les deux racines plus grandes que l'unité auront des valeurs entières différentes, les transformées résultantes de chacune de ces valeurs n'auront plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité : il ne sera donc pas nécessaire, pour obtenir les valeurs entières approchées des racines correspondantes, de calculer pour chacune d'elles la limite de la plus petite différence entre les racines.

Les coefficiens A', B', C', etc., de la transformée (N), exprimés au moyen de ceux de la proposée, sont (Iere sect. n°. 275)

$$A'=Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+Dp^{m-3}+\text{etc.}$$
$$B'=mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}$$
$$+(m-3)Dp^{m-4}+\text{etc.}$$
$$C'=m.\frac{m-1}{2}Ap^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3}+\text{etc.}$$

On obtiendra ceux de la transformée (P) en écrivant dans les formules précédentes q pour p, A', B', C' etc. pour A, B, C, etc. et changeant A', B', C', etc. en A'', B'', C'', etc.

Il résulte de ces expressions que l'un des coefficiens A', A'', etc. ne sera jamais nul; car, dans le cas de

$$A'=0, \text{ ou } A''=0, \text{ etc.}$$

on aurait (Iere sect. n°. 251)

$$y=\infty, \text{ ou } z=\infty, \text{ etc.}$$

donc

$$z=p, \text{ ou } y=q, \text{ etc.}$$

et conséquemment la valeur correspondante de x serait commensurable.

Soient

Soient donc p, q, r, s, t, etc. les valeurs entières approchées des racines des équations des (M), (N), (P), etc., en sorte qu'on ait

$$x = p + \frac{1}{y},\ y = q + \frac{1}{z},\ z = r + \frac{1}{u},\ \text{etc.}$$

on trouvera par des substitutions successives,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0:$$

Si l'on restitue le terme manquant, sous les signes + et —, on trouve toujours deux permanences et une variation ; on ne peut donc rien affirmer quant à la réalité ou à l'imaginarité des racines (1re sect., n°. 306). Mais l'équation aux quarrés des différences des racines,

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0,$$

calculée (1re sect., n°. 304) n'ayant pas les signes alternatifs, on doit conclure (n°. 5) que la proposée a deux racines imaginaires et seulement une réelle, de sorte qu'il suffira de faire successivement

$$x = 0,\ = 1,\ = 2,\ = 3,$$

substitutions qui donneront les résultats -5, -6, -1, $+16$, d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation proposée sera entre les nombres 2 et 3, et qu'ainsi $p = 2$ sera la valeur la plus approchée de cette racine. On fera donc

$$x = 2 + \frac{1}{y},$$

en sorte que la transformée en y sera

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

après en avoir changé les signes pour rendre le premier terme positif. Cette équation aura donc nécessairement une seule racine réelle plus grande que l'unité, de sorte que pour en avoir la valeur approchée, il faudra encore substituer les nombres 0, 1, 2, 3, etc. jusqu'à ce qu'on trouve deux résultats de signes contraires : les substitutions 0 et 10 donnant deux résultats négatifs, on commencera par les suivantes

$$y = 10, = 11, = 12, \text{ etc.}$$

qui donnent -61, $+54$, etc. ; d'où l'on conclut 10 pour valeur approchée ; donc $q = 10$. On fera donc

$$y = 10 + \frac{1}{z},$$

d'où résulte la transformée en z

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0;$$

et supposant successivement $z = 1, = 2$, etc., on trouvera les résultats -54, $+71$, etc., donc $r = 1$; conséquemment

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

d'où résulte la transformée en u

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0;$$

et aux substitutions $u = 1, = 2$, etc. correspondront les résultats -71, $+293$, etc., donc $s = 1$ et ainsi de suite.

La racine cherchée sera donc exprimée par la fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

D'où l'on déduira les fractions

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.}$$

alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de x (n°. 11), et dont les valeurs en fractions décimales, seront

2,000000
2,100000
2,090909
2,095238
2,094339
2,094594
2,094545
2,094555
2,094551

La dernière fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée, mais (n°. 15) elle en diffère de moins de $\frac{1}{(7837)^2}$ c'est-à-dire, de moins de 0,0000000163, en sorte que cette fraction sera exacte jusqu'à la septième décimale : or, réduite en décimales, elle est 2,0945514865.... etc. Ainsi la racine cherchée tombe entre 2,09455149 et 2,09455147.

Newton a trouvé par sa méthode (1re sect., n°. 299) la fraction 2,09455147: d'où l'on voit qu'elle donne, dans ce cas, un résultat fort exact. Mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude.

Quant aux deux autres racines qui sont imaginaires, on pourrait en trouver les valeurs numériques par la méthode précédente.

Pour cela, reprenant l'équation aux quarrés des différences

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0,$$

on changera les racines négatives en positives en faisant $y = -y$, ce qui donnera, après avoir changé les signes

$$y^3 + 12y^2 + 36y - 643 = 0,$$

et il ne s'agira que de chercher une racine réelle et positive de cette équation. Puisqu'elle a son dernier terme négatif, et qu'elle est de degré impair, elle aura nécessairement une telle racine (1re sect. n°. 288), dont on pourra trouver la valeur entière la plus approchée par les substitutions successives des nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc. On formera donc, ainsi que nous l'avons indiqué dans la Théorie générale, les tranformées en z, u, etc., et de cette manière on approchera de plus en plus de la valeur de y, laquelle sera exprimée par une fraction continue, d'où l'on déduira une suite de fractions convergentes. Connaissant ainsi y, on aura (n°. 6)

$$\beta = \frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Ainsi on connaîtra β en nombre. On substituera maintenant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x dans l'équation proposée; et faisant deux équations séparées des termes réels et de ceux qui sont affectés de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

On cherchera le plus grand commun diviseur de ces deux équations, et on poussera seulement la division jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste qui ne contienne α qu'à la première puissance : ce reste sera $-\frac{8\beta^2+4}{3}\alpha - 5$, lequel étant fait $= 0$, donnera

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2+1)}.$$

Ainsi on aura la valeur des deux racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$.

Prenons pour second exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0, \text{ ou } x^3 - 63x + 189 = 0,$$

qui résulte de la première par l'hypothèse

$$x = \frac{x}{3},$$

et pour laquelle nous avons trouvé (1ère sect. n°. 197) une racine entre 4 et 5, et une autre entre 5 et 6. Pour approcher davantage de la véritable valeur de la première de ces racines, posons

$$x = 4 + \frac{1}{y},$$

et nous aurons

$$y^3 - 15y^2 + 12y + 1 = 0,$$

équation qui n'a qu'une seule racine plus grande que l'unité, en sorte qu'il n'est besoin que de substituer pour x les nombres 1, 2, 3, etc. : on trouvera de cette manière qu'une des racines est comprise entre les nombres 14 et 15 : donc $q = 14$ et

$$y = 14 + \frac{1}{u},$$

d'où résulte

$$27u^3 - 180u^2 - 27u - 1 = 0.$$

La partie entière de la valeur de u est 6, donc $r = 6$, en sorte qu'il faut poser

$$u = 6 + \frac{1}{t};$$

et continuant de cette manière, on trouvera, pour les numérateurs et dénominateurs des fractions élémentaires,

$A = 4$	$A' = 1$
$B = 57$	$B' = 14$
$C = 346$	$C' = 85$
$D = 403$	$D' = 99$
$E = 1958$	$E' = 481$
$F = 12151$	$F' = 2985$
etc.	etc.

Ainsi les valeurs les plus approchées de la racine de la proposée, qui tombe entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$ seront données par les fractions

$$\frac{4}{3},\ \frac{57}{42},\ \frac{346}{255},\ \frac{403}{297},\ \frac{1958}{1443},\ \frac{12151}{8955},\ \text{etc.}$$

Si nous réduisons la dernière en fraction décimale, nous trouverons pour valeur très-approchée de la racine en question

$$x = 1,356895.$$

Pour trouver l'autre racine qui, pour la proposée, tombe entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$ et, pour la transformée, entre 5 et 6, nous supposerons

$$x = 5 + \frac{1}{y},$$

et nous aurons

$$y^3 - 12y^2 - 15y - 1 = 0,$$

dont une racine est comprise entre 13 et 14 : faisons donc

$$y = 13 + \frac{1}{u},$$

et nous trouverons

$$27u^3 - 180u^2 - 27u - 1 = 0;$$

et comme cette transformée est exactement la même que celle en u, trouvée plus haut, il est évident qu'on obtiendra les mêmes nombres 6, 1, 4, 6 etc. ; on aura donc

$A = 5$	$A' = 1$
$B = 66$	$B' = 13$
$C = 401$	$C' = 79$
$D = 467$	$D' = 92$
$E = 2269$	$E' = 447$
$F = 14081$	$F' = 2774$
etc.	etc.

en sorte que les valeurs approchées de la racine comprise entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$ seront données par les fractions

$$\frac{5}{3},\ \frac{66}{39},\ \frac{401}{237},\ \frac{467}{276},\ \frac{2269}{1441},\ \frac{14081}{8322},\ \text{etc.}$$

dont la dernière vaut 1,69202.

La racine négative tombe entre les nombres -3 et $-\left(3+\frac{1}{3}\right)$, ou entre les nombres $+3$ et $+3+\frac{1}{3}$, lorsqu'on prend la transformée

$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$

et on en cherchera par la méthode précédente une valeur aussi approchée que le requiert l'état de la question.

L'équation

$$x^4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0 \ldots . X$$

a pour équation aux quarrés des différences entre ses racines

$$y^6 - 32y^5 + 344y^4 - 1312y^3 + 784y^2 - 128y = 0,$$

laquelle est divisible par y, et donne

$$y = 0,$$

ce qui indique que la proposée a deux racines égales. Pour les trouver, il faudra conformément à la méthode donnée (1ere sect. n°. 275) former le polynome

$$4x^3 - 8x + 4 = 0 \ldots . Y$$

dont le plus grand commun diviseur avec X est $x - 1$, en sorte que la proposée contient deux racines dont chacune $= 1$; et la divisant par $(x - 1)^2$, on obtient pour quotient

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

La limite des racines positives étant ici $-1 + 1 = 0$, on posera

$$x = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y},$$

d'où résultera la transformée

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$

qui donne 2 pour partie entière de y : on fera donc

$$y = 2 + \frac{1}{z},$$

substitution qui donnera une transformée

Digitized by Google

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

qui est en z ce qu'est la précédente en y. On aura donc

$$p = 0,\ q = r = s \text{ etc.} = 2,$$

en sorte qu'il sera facile de former les fractions convergentes vers cette racine de la proposée.

23. Examinons maintenant dans quel cas une des racines réelles d'une équation, développée en fraction continue sera donnée par une fraction continue périodique. On sait que chaque racine réelle sera de la forme

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}}}}$$

q, r, s, t, etc. étant les valeurs entières approchées de la racine réelle de chacune des transformées (N), (P), (Q), etc. Or, pour que cette fraction soit périodique, il faut qu'à partir d'un certain terme, les mêmes dénominateurs déjà trouvés, reviennent dans le même ordre à l'infini, ou qu'il y ait deux termes à partir desquels les mêmes dénominateurs se reproduisent et dans le même ordre. Donc, pour que la fraction soit périodique, il faut que parmi les transformées il s'en trouve deux qui aient les mêmes racines; ainsi, lorsqu'on verra dans une fraction continue reparaître un des nombres déjà trouvé, il n'y aura qu'à examiner si les racines des transformées qui ont ce nombre pour valeur entière approchée, sont les mêmes, c'est-à-dire, si ces deux transformées ont une racine commune, ce qu'on reconnaîtra aisément en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux premiers membres, lequel doit nécessairement contenir toutes les racines communes aux deux équations, s'il y en a. Or, comme nous avons vu (n°. 21) que toute fraction périodique se réduit à la racine d'une équation du second degré, il s'en-

$$x' = p' + \frac{1}{x''}$$

et ainsi de suite. On observera que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4AA' = B''^2 - 4A'A'' = \text{etc};$$

donc la quantité radicale sera la même dans toutes les valeurs de x, x', x'', etc. Ainsi, désignant $B^2 - 4AC$ par D, on aura, pour les transformées successives,

$$A'x'^2 + B'x' + A = 0$$
$$A''x''^2 + B''x'' + A' = 0$$
$$A'''x'''^2 + B'''x'' + A'' = 0$$
etc.

et ce tableau des valeurs de A', A'', A''', etc., B', B'', B''', etc. et p, p', p'', etc.

		$p < \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$
$A' = Ap^2 + Bp + C$	$B' = 2Ap + B$	$p' < \frac{-B'+\sqrt{D}}{2A'}$
$A'' = A'p'^2 + B'p' + A$	$B'' = 2A'p' + B'$	$p'' < \frac{-B''+\sqrt{D}}{2A''}$
$A''' = A''p''^2 + B''p''^2 + A'$	$B''' = 2A''p'' + B''$	$p''' < \frac{-B'''+\sqrt{D}}{2A'''}$
etc.	etc.	etc.

En observant que

$$B'^2 - 4AA' = D = B''^2 - 4A'A'' = B'''^2 - 4A''A''' = \text{etc.}$$

on voit que les valeurs de A', A'', A''', etc., peuvent se déduire beaucoup plus facilement de ces formules

$$A' = \frac{B'^2 - D}{4A}; \quad A'' = \frac{B''^2 - D}{4A'}; \quad A''' = \frac{B'''^2 - D}{4A''}, \text{ etc.}$$

Lorsque la proposée n'a qu'une racine réelle positive, ou deux racines positives dont la différence est plus grande que l'unité, chacune des transformées ne peut avoir qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité. Mais si la différence des deux racines de la proposée, est plus petite que l'unité, les transformées auront d'abord deux racines plus grandes que l'unité, puisque le même nombre entier p, par exemple, étant une première approximation vers l'une et l'autre racine, $\frac{1}{x'}$ sera le complément de p à chacune d'elles; mais on parviendra toujours à une transformée qui n'aura qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité. Soient

$$A^{(m)}(x^{(m)})^2+B^{(m)}x^{(m)}+A^{(m-1)}=0\ldots.(1)$$

cette transformée, et π la partie entière de la racine plus grande que l'unité : la transformée suivante sera

$$A^{(m+1)}(x^{(m+1)})^2+B^{(m+1)}x^{(m+1)}+A^{(m)}=0\ldots.(2)$$

et on aura entre les coefficiens et le nombre π la relation

$$A^{(m+1)}=A^{(m)}\pi^2+B^{(m)}\pi+A^{(m-1)}\ldots..(3).$$

Mais la transformée (1) ayant une seule racine plus grande que π, si dans cette transformée on écrit successivement π et la limite supérieure des racines positives, on aura deux résultats de différens signes; or la limite supérieure donne un résultat de même signe que $A^{(m)}$, et la substitution de π donne d'après (3)

$$A^{(m)}\pi^2+B^{(m)}\pi+A^{(m-1)}=A^{(m+1)};$$

donc $A^{(m)}$ et $A^{(m+1)}$ auront des signes différens, et l'on démontrera de la même manière que, dans les transformées suivantes, les signes changeront en passant de $A^{(m+1)}$ à $A^{(m+2)}$, de $A^{(m+2)}$ à $A^{(m+3)}$, etc. Cela posé, parce que

$$D = B^{(m+1)} B^{(m+1)} - 4A^{(m)} A^{(m+1)} = B^{(m+2)} B^{(m+2)} - 4A^{(m+1)} A^{(m+2)} = \text{etc.},$$

et que les produits $A^{(m)} A^{(m+1)}$, $A^{(m+1)} A^{(m+2)}$ sont tous négatifs, nécessairement

$$B^{(m+1)} < \sqrt{D};\ B^{(m+2)} < \sqrt{D},\ \text{etc.};$$

et d'ailleurs les nombres $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, etc. étant tous entiers, on aura encore

$$A^{(m)} < D;\ A^{(m+1)} < D,\ \text{etc.};$$

et comme il ne peut y avoir qu'un nombre déterminé et fini de nombres entiers et moindres que D et que $\sqrt{D}$, les coefficiens $B^{(m+1)}$, $B^{(m+2)}$, etc., $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, etc., ne peuvent admettre qu'un nombre déterminé de valeurs différentes; conséquemment on aura, par exemple,

$$B^{(m+n)} = B^{(m)};\ A^{(m+n-1)} = A^{(m-1)}:$$

mais

$$x^{(m)} = \frac{-B^{(m)} + \sqrt{D}}{2A^{(m)}};\quad x^{(m+n)} = \frac{-B^{(m+n)} + \sqrt{D}}{2A^{(m+n)}}$$

et d'ailleurs

$$D = B^{(m)2} - 4A^{(m-1)} A^{(m)} = B^{(m+n)2} - 4A^{(m+n-1)} A^{(m+n)} = \text{etc.};$$

donc

$$A^{(m)} = A^{(m+n)} \text{ et } x^{(m)} = x^{(m+n)}$$

et dès-lors la fraction continue sera périodique.

On pourra appliquer ces formules au développement en fraction continue de la racine quarrée de $\frac{11}{3}$, pour laquelle on a,

$$x = \sqrt{\tfrac{11}{3}} \text{ et } 3x^2 - 11 = 0;$$

conséquemment

$$A = 3,\ C = -1,$$

et on trouvera pour x une fraction continue périodique.

**

CHAPITRE V.

Toute fonction algébrique, rationnelle et invariable des racines d'une équation, peut être exprimée d'une manière rationnelle au moyen des coefficiens de cette équation.

25. Soient α, β, γ, δ, etc. les racines d'une équation, et posons que les termes de la fonction proposée, soient de la forme $\alpha^n \times \gamma^p$: si l'on représente par $T.\alpha^n$ la somme des puissances du degré n des racines, et par $T.\alpha^p$ celle des puissances du degré p, ou, en d'autres termes, si l'on pose

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{etc.} = T.\alpha^n$$
$$\alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \delta^p + \text{etc.} = T.\alpha^p,$$

et qu'on multiplie $T.\alpha^n$ par $T\alpha^p$, le produit contiendra deux espèces de termes, les uns de la forme $\alpha^n\,\beta^p$ que nous désignerons par $T.\alpha^n\,\beta^p$, les autres tels que α^{n+p} que nous désignerons par $T.\alpha^{n+p}$; on aura donc

$$T.\alpha^n \times T.\alpha^p = T.\alpha^n\,\beta^p + T.\alpha^{n+p},$$

d'où on déduit

$$T.\alpha^n\,\beta^p = T.\alpha^n \times T.\alpha^p - T.\alpha^{n+p} \ldots\ldots (1)$$

Ainsi la somme des termes de la forme $\alpha^n\,\beta^p$ sera donnée au moyen de celle des puissances n, p et $n+p$ des racines de la proposée, et conséquemment elle pourra se traduire en coefficiens de la proposée. (1re sect., n°. 301). Si on multiplie les deux membres de la dernière équation ci-dessus par la somme des puissances q des racines ou par $T.\alpha^q$, on aura

$$T.\alpha^q \times T.\alpha^n\beta^p = T.\alpha^n \times T.\alpha^p \times T.\alpha^q - T.\alpha^q \times T.\alpha^{n+p},$$

Effectuant la multiplication indiquée dans le premier membre, on trouvera dans le produit trois classes distinctes de termes : l'une comprendra les termes de la forme $\alpha^{n+q}\,\beta^{p}$; la seconde ceux-ci $\alpha^{p+q}\beta^{n}$, et la troisième, tous les termes tels que $\alpha^{n}\,\beta^{p}\gamma^{q}$: si donc on désigne la collection des premiers par $T.\,\alpha^{n+q}\,\beta^{p}$, celle des seconds par $T.\,\alpha^{p+q}\,\beta^{n}$, et enfin la totalité des autres par $T.\,\alpha^{n}\,\beta^{p}\,\gamma^{q}$, on aura

$$T.\,\alpha^{n}\beta^{p}\gamma^{q} + T.\alpha^{n+q}\,\beta^{p} + T.\alpha^{p+q}\,\beta^{n}$$
$$= T.\,\alpha^{n} \times T.\alpha^{p} \times T.\alpha^{q} - T.\alpha^{q} \times T.\,\alpha^{n+p}$$

d'où on déduit

$$T.\alpha^{n}\,\beta^{p}\gamma^{q} = T.\,\alpha^{n} \times T.\,\alpha^{p} \times T.\,\alpha^{q} - T.\,\alpha^{n+q}\,\beta^{p}$$
$$- T.\,\alpha^{p+q}\,\beta^{n} - T.\,\alpha^{q} \times T.\,\alpha^{n+p}.$$

Or $T.\,\alpha^{n+q}\,\beta^{p}$ et $T.\,\alpha^{p+q}\,\beta^{n}$ étant des fonctions formées du produit de deux lettres, on peut les faire dépendre de sommes des puissances des racines, en changeant dans la formule (1) d'abord n en $n+q$, ce qui donne

$$T.\,\alpha^{n+q}\,\beta^{p} = T.\,\alpha^{p} \times T.\alpha^{n+q} - T.\,\alpha^{n+p+q},$$

puis n en $p+q$ et p et n, ce qui donne

$$T.\,\alpha^{p+q}\,\beta^{n} = T.\,\alpha^{n} \times T.\,\alpha^{p+q} - T.\,\alpha^{n+p+q};$$

et substituant dans l'expression de $T.\,\alpha^{n}\,\beta^{p}\,\gamma^{q}$, on aura cette égalité

$$T.\,\alpha^{n}\,\beta^{p}\gamma^{q} = T.\,\alpha^{n} \times T.\,\alpha^{p} \times T.\alpha^{q} - T.\,\alpha^{p} \times T.\,\alpha^{n+q}$$
$$- T.\,\alpha^{n} \times T.\,\alpha^{p+q} - T.\,\alpha^{q} \times T.\,\alpha^{n+p} + 2T.\,\alpha^{n+p+q} \ldots\ldots (2)$$

dans le second membre de laquelle il n'entre plus que des sommes des puissances des racines, traductibles en coefficiens de l'équation donnée. En continuant à opérer de cette manière, on parviendrait à faire dépendre de sommes des puissances des racines une fonction symétrique composée d'une suite de termes tels que $\alpha^{n}\,\beta^{p}\,\gamma^{q}\,\delta^{r}$

Pour prendre le cas le plus simple, considérons des fonc-

tions algébriques, rationnelles et invariables des racines d'une équation du second degré

$$x=a+\sqrt{b}\,;\,y=a-\sqrt{b},$$

ou a et b sont des fonctions connues des coefficiens de l'équation: on aura

$$m(x+y)=2ma$$
$$m(x^2+y^2)=2m(a^2+b)$$
$$mxy=m(a^2-b)$$
$$m(x^2+y^2)+nxy+p(x+y)=2m(a^2+b)+n(a^2-b)+2pa$$
$$m(x^3+y^3)=2m(a^3+3ab)$$
$$m(x^2y+xy^2)=2am(a^2-b)$$
$$m(x^4+y^4)=2m(a^4+6a^2b+b^2)$$
$$m(x^3y+xy^3)=2m(a^4-b^2)$$
$$mx^2y^2=m(a^4-2a^2b+b^2).$$

En sorte que si x et y sont données au moyen des deux équations

$$x+y=p,\ xy=q,$$

pour lesquelles on a

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,;\ y=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,;$$

comme alors $a=\frac{p}{2}$ et $b=\frac{p^2}{4}-q$, les fonctions précédentes deviendront

$$m(x+y)=mp$$
$$m(x^2+y^2)=m(p^2-q)$$
$$mxy=mq$$
$$m(x^3+y^3)=mp(p^2-3q)$$
$$m(x^2y+xy^2)=mpq$$
$$m(x^4+y^4)=m(p^4-4p^2q+2q^2)$$
$$m(x^3y+xy^3)=mq(p^2-2q)$$

toutes

toutes ces fonctions sont donc exprimées d'une manière rationnelle au moyen des coefficiens p et q de la proposée.

Appliquons cette propriété des fonctions invariables des racines d'une équation, d'etre traductibles d'une manière rationnelle en coefficiens, à la recherche de l'équation finale en y, correspondante au système d'équations

$$x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$x^2 + a'xy + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0 \ldots\ldots (2)$$

que nous réduirons à la forme

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

en posant

$$p = ay + c;\ q = by^2 + dy + e$$
$$p = a'y + c';\ q' = b'y^2 + d'y + e';$$

désignons par α et β les deux valeurs de x, déduites de la première, et substituons-les dans la seconde qui se changera dans les deux suivantes

$$(3) \ldots\ldots \alpha^2 + p'\alpha + q' = 0;\ \beta^2 + p'\beta + q' = 0 \ldots\ldots (4)$$

qui doivent concourir également à la formation de l'équation finale, laquelle doit les comprendre toutes deux et exister en même tems qu'elles.

Pour remplir ces conditions, on multipliera (3) par (4), et on trouvera pour produit

$$\alpha^2\beta^2 + p'(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) + p'^2\alpha\beta + q'(\alpha^2 + \beta^2) + p'q'(\alpha + \beta) + q'^2 = 0 \ldots\ldots (5)$$

mais

$$\alpha^2\beta^2 = q^2;\ \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -pq$$

donc

$$(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q;$$

$$q^2 - pp'q + p'^2q + p^2q' - 2qq' - pp'q' + q'^2 = 0.$$

Or

$$q^2 - 2qq' + q'^2 = (q-q')^2,$$
$$-pp'q + p'^2q + p^2q' - pp'q' = (pq'-p'q)(p-p'),$$

donc on a pour équation finale en y

$$(q-q')^2 + (pq'-p'q)(p-p') = 0.$$

Proposons-nous encore d'évaluer les coefficiens d'une équation qui aurait pour racines toutes les sommes qu'on peut former avec les racines d'une équation donnée, prises deux à deux.

Soit, pour plus de simplicité, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

dont les racines soient α, β, γ : en sorte que celles de l'équation cherchée seront $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$. Si z est l'inconnue de la nouvelle équation, on aura

$$[z-(\alpha+\beta)][z-(\alpha+\gamma)][z-(\beta+\gamma)] = 0;$$

comme les racines α, β et γ entrent de la même manière et le même nombre de fois dans les facteurs, les coefficiens du produit développé resteront les mêmes en faisant entre les racines tous les échanges possibles; ces coefficiens seront donc des fonctions invariables des racines α, β, γ, et pourront conséquemment être énoncés au moyen des coefficiens P, Q, R, de la proposée. Effectuant les produits indiqués, on trouvera

$$z^3 - 2(\alpha+\beta+\gamma)z^2 + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma)z$$
$$-(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2) = 0;$$

or on a

$$\alpha+\beta+\gamma = -P$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma = P^2+Q;$$

et faisant $n=2$ et $p=1$ dans (1) (n° 25), on trouve

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2 = T.\alpha^2 \times T.\alpha - T.\alpha^3$$

mais on a (1re sect., n° 301)

$$T.\alpha^2 \text{ ou } S_2 = P^2 - 2Q$$
$$T.\alpha^3 \text{ ou } S_3 = -P^3 + 3PQ - 3R\,;$$

donc l'équation cherchée devient

$$z^3 + 2Pz^2 + (P^2 + Q)z + PQ - 3R = 0.$$

26. On voit par cet exemple *que pour trouver l'équation d'où dépend une fonction assignée des racines d'une équation proposée, il faut faire dans cette fonction toutes les permutations possibles entre les racines* α, β, γ, *etc. et désignant par* α', β', γ', *etc. les combinaisons qui en résultent, on égalera à zéro le produit des facteurs* $(z-\alpha')$, $(z-\beta')$, $(z-\gamma')$ *etc.; alors les coefficiens des puissances de* z *dans l'équation à laquelle on parviendra, étant des fonctions symétriques des quantités* α', β', γ' *etc. qui elles-mêmes sont, d'après leur formation, des fonctions symétriques des racines* α, β, γ, *etc. de la proposée, pourront être énoncés rationnellement au moyen des coefficiens de l'équation donnée.*

Les considérations précédentes fourniraient un nouveau moyen d'obtenir l'équation aux quarrés de différences des racines d'une équation donnée (1ère sect., n°. 295) : elles serviront aussi dans la résolution générale des équations, ainsi qu'on le verra par la suite.

CHAPITRE VI.

Du degré de l'équation finale résultante de l'élimination entre un nombre quelconque d'équations et le même nombre d'inconnues.

27. L'ÉQUATION finale résultante de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues, qui est le cas

le plus simple, et que nous considérerons d'abord, peut encore se déduire de cette propriété des fonctions invariables des racines, de pouvoir être traduites en coefficiens de l'équation.

Soient

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots\ldots (M)$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + T'x + V' = 0 \ldots\ldots\ldots (N)$$

les deux équations proposées, dans lesquelles les coefficiens P, Q...... T, V, P', Q',..... T' et V' sont des fonctions de y seulement, dont les compositions ont été assignées (1ère sect. n° 261). Concevons qu'on ait résolu l'équation (M) par rapport à x, et quon ait trouvé les racines $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ etc. α, β, γ, etc. étant des fonctions de l'autre inconnue y; il est clair qu'en faisant $x = \alpha$ dans (M), cette équation sera satisfaite, quelque valeur qu'on suppose à y; mais les les mêmes racines doivent convenir en même tems à l'équation (N), condition qui limite les nombres des valeurs d'y; on doit donc avoir

$$\alpha^n + P'\alpha^{n-1} + Q'\alpha^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + T'\alpha + V' = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

équation qui ne renferme plus que y, et dont les racines combinées avec $x = \alpha$, satisferont à la fois aux équations (M) et (N); donc l'équation finale en y doit avoir parmi ses racines toutes celles de l'équation (1). On prouverait de la même manière que les racines des équations

$$\beta^n + P'\beta^{n-1} + Q'\beta^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + T'\beta + V' = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\gamma^n + P'\gamma^{n-1} + Q'\gamma^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + T'\gamma + V' = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

combinées avec les valeurs $x = \beta$, $x = \gamma$, etc. doivent satisfaire aux équations (M) et (N), et que les valeurs de y, déduites de (2) et (3) sont des racines de l'équation finale : on obtiendrait donc celle-ci, si les fonctions α, β, γ etc. de y étaient connues, en multipliant entre elles les équations (1), (2), (3) etc. et égalant le produit à zéro; mais, dans ce produit, toutes les racines α, β, γ etc. seront combinées de la même manière; elles

pourront donc être évaluées en coefficiens P, Q, ..., T, V de l'équation proposée, d'après l'analyse exposée précédemment, et le résultat sera l'équation finale en y. Examinons maintenant à quel degré, au plus, peut s'élever cette équation. Dans le produit des équations (1), (2), (3) etc. le résultat de la multiplication des termes de la première ligne verticale sera

$$(\alpha\,\beta\,\gamma \text{ etc.})^n = V^n;$$

mais le plus haut exposant de y dans V ne peut surpasser m, en sorte que V^n ne peut renfermer y avec un exposant plus élevé que $m\,n$: passons au produit des seconds termes

$$P'^m\,(\alpha\,\beta\,\gamma \text{ etc.})^{n-1} = P'^m\,V^{n-1};$$

P' étant de la forme $a+by$, P'^m contient au plus y^m, d'une autre part V^{n-1} ne peut être que de la dimension $mn - m$ en y, en sorte que $P'^m\,V^{n-1}$ renfermera, au plus, y^{mn}. On prouverait de la même manière, que dans le produit des troisièmes termes, ou dans

$$Q'^m\,(\alpha\,\beta\,\gamma \text{ etc.})^{n-2} = Q'^m\,V^{n-2}$$

l'inconnue y ne peut être affectée d'un exposant plus élevé que mn et ainsi des produits des autres termes verticalement placés. Reste donc maintenant à démontrer qu'en prenant un terme quelconque dans chacune des équations (1), (2), (3) etc. le produit ne peut contenir y avec un exposant plus élevé que mn. Soient r l'exposant de α dans le terme arbitraire pris dans l'équation (1) et k le coefficient, r' l'exposant de β dans un des termes de (2) et k' le coefficient, r'' celui de γ dans un terme quelconque de (3) et k'' son coefficient, et ainsi de suite ; en sorte qu'on ait le produit $k\alpha^r \times k'\beta^{r'} \times k''\gamma^{r''}$ etc. On observera d'abord que chacune des sommes faites de r et de l'exposant de y dans k, de r' et de l'exposant de y dans k', de r'' et de l'exposant de y dans k'', et ainsi de suite, ne peut excéder n ; d'où il est aisé de conclure, en observant d'ailleurs que les équations (1), (2), (3) etc. sont en nombre m, que l'exposant

de y dans le produit des coefficiens k, k', k'', etc. plus le nombre $r+r'+r''$ etc. forment une somme qui ne peut surpasser mn. La proposition sera donc établie, si l'on démontre que la somme des termes de la forme $\alpha^{r} \mathcal{C}^{r'} \gamma^{r''}$ etc. qui, dans le produit des équations (1), (2) et (3) ont le même coefficient $k.k'.k''$, etc. ne contient y qu'à la dimension $r+r'+r''$, etc. En faisant usage du théorême sur les fonctions invariables, démontré dans le titre précédent, la question se réduira, en dernière analyse, à prouver que $T.\,\alpha^{r+r'+r''}$, etc. qui entre dans l'expression de $T.\alpha^{r}\mathcal{C}^{r'}\gamma^{r''}$, etc. (n°. 25) est de dimension $r+r'+r''+$, etc. en y, ce dont on se convaincra en observant que la somme des puissances $r+r'+r''$ etc. des racines d'une équation est donnée au moyen de $r+r'+r''+$ etc. coefficiens de cette équation (1[re] sect. n° 301); et qu'ainsi, cette somme comprendra un coefficient dans lequel l'inconnue y sera, au plus, élevée à la puissance $r+r'+r''+$etc.

Nous ferons connaître une autre démonstration de cette proposition, remarquable par son élégante simplicité : elle a été donnée par le *citoyen Poisson, ancien élève de l'École Polytechnique.*

Soient les deux équations complètes :

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0 \ldots\ldots (M)$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots\ldots + V' = 0 \ldots\ldots (N)$$

qu'on peut écrire ainsi qu'il suit

$$(x-\alpha)(x-\mathcal{C})(x-\gamma)\ldots\ldots\ldots = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots\ldots = 0 \ldots\ldots (2)$$

α, $\mathcal{C}$, etc. a, b, fonctions de y étant les racines de (M) et de (N). L'équation finale débarrassée de tout facteur étranger à l'état de la question, est

$$(a^m + Pa^{m-1} + \text{etc.})\,(b^m + Pb^{m-1} + \text{etc.}) \ldots\ldots$$
$$(c^m + Pc^{m-1} + \text{etc.})\ \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (3)$$

ou

$$(\alpha^n + P'\alpha^{n-1} + \text{etc.})\ (\beta^n + P'\beta^{n-1} + \text{etc.}) \ldots\ldots\ldots$$
$$(\gamma^n + P'\gamma^{n-1} + \text{etc.})\ \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (4)$$

Or l'équation finale (3) est rationnelle par rapport aux coefficiens P, Q, etc. et l'équation finale (4) l'est par rapport aux coefficiens P', Q', etc. ; donc l'équation finale est rationnelle par rapport à P, Q, etc. P', Q', etc. ; comme d'ailleurs ces coefficiens sont des fonctions rationnelles de y, nécessairement aussi l'équation finale sera rationnelle en y. Reste à déterminer le degré de cette équation. Ce degré ne change point, lorsqu'on réduit chacun des coefficiens P, Q, etc., P', Q', etc. à son terme de plus haut exposant en y : en effet, si l'on opère cette réduction seulement dans les coefficiens P, Q, etc. de (3), le degré de cette équation ne varie point : même conclusion à déduire par rapport à (4) d'une réduction analogue dans les coefficiens P', Q', etc. Après une telle réduction, les équations (M) et (N) deviennent homogènes en x et y, en sorte que divisées par y^m et par y^n, elles ne renferment que l'inconnue $\frac{x}{y}$, et elles sont décomposables ainsi qu'il suit

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{x}{y}-\mu\right)\left(\frac{x}{y}-\nu\right)\text{etc.}\ldots=0\\ \left(\frac{x}{y}-\mu'\right)\left(\frac{x}{y}-\nu'\right)\text{etc.}\ldots=0\end{array}\right\}\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}(x-\mu y)\ (x-\nu y)\ \text{etc.}=0\\ (x-\mu' y)(x-\nu' y)\text{etc.}=0,\end{array}\right.$$

μ, ν, etc. μ', ν', etc. étant des nombres. L'équation finale est bien évidemment du degré mn en y, puisqu'elle est le produit des n équations

$$(\mu' y-\mu y)\ (\mu' y-\nu y)\ \text{etc.} = y^m\ (\mu'-\mu)\ (\mu'-\nu)\ \text{etc.} = 0$$
$$(\nu' y-\mu y)\ (\nu' y-\nu y)\ \text{etc.} = y^m\ (\nu'-\mu)\ (\nu'-\nu)\ \text{etc.} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

dont chacune est du degré m.

28. Le même géomètre a généralisé la proposition et l'a étendue

à un nombre quelconque d'équations complètes entre pareil nombre d'inconnues. Nous donnerons sa démonstration, à quelques développemens près, telle qu'elle se trouve dans le onzième cahier du Journal de cette école, ou, pour simplifier, il ne considère que quatre équations, attendu qu'il est facile d'appliquer au cas le plus général, les raisonnemens faits sur le cas particulier.

Représentons donc par (a), (b), (c) et (m) quatre équations, la première du degré a, la seconde du degré b, la troisième du degré c, et enfin la quatrième du degré m, entre les quatre inconnues x, y, z, et u: et supposons que les équations sont complètes, c'est-à-dire, que (a) représente l'équation la plus générale du degré a et ainsi des autres. Si l'on élimine successivement entre les trois premières, z et y, z et x, y et x, on obtiendra trois équations du même degré, la première entre x et u, la seconde entre y et u, et la troisième entre z et u.

En effet, chacune de ces équations étant complète et par conséquent de même degré, soit en x, soit en y, en z ou en u, si, après avoir éliminé z et y entre les trois premières, et obtenu une équation du degré n entre x et u, on élimine soit z et x, y et x, qui entrent de la même manière dans les mêmes équations, on arrivera nécessairement à des équations du degré n entre y et u, z et u. Soient a_1, a_2, ...a_n les valeurs de x en u; $b_1, b_2, \ldots b_n$ celles de y en u; c_1, c_2, ...c_n celles de z en u; si l'on prenait indistinctement une valeur de x, une de y et une de z, ces trois valeurs ne satisferaient pas ensemble aux équations (a), (b) et (c); c'est-à-dire, que les résultats ne deviendraient pas nuls d'eux-mêmes. En effet, si l'on élimine d'abord z entre (a) et (b), on aura une équation finale qui peut être représentée par

$$(x, y, u) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si entre (b) et (c) on élimine aussi z, il viendra pour équation finale

$$[x, y, u] = 0 \ldots\ldots (2)$$

entre ces deux équations éliminant y, on obtient

$$\{x, u\} = 0 \ldots\ldots (3)$$

en sorte que les valeurs de x, y et z en u qui satisfont ensemble aux équations (a), (b) et (c) sont données par (3), (2) et l'une des équations (a), (b) ou (c).

Supposons donc que a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2, et, en général, a_p, b_p, c_p, soient les valeurs de x, y et z qui satisfont ensemble à ces équations, et concevons que l'on substitue chacun de ces systèmes de valeurs pour x, y, z dans le premier membre de l'équation (m), le second étant supposé zéro ; on obtiendra par-là un nombre n de fonctions irrationnelles de u et il résulte de là, 1° que toute quantité qui, mise à la place de u dans l'une quelconque de ces fonctions, la rendra nulle, sera une des valeurs de l'inconnue u ; car pour chacune d'elles, combinée avec le système correspondant des valeurs de x, y et z, les quatre équations sont satisfaites ; 2° que réciproquement chacune des valeurs que peut avoir cette inconnue, doit rendre nulle une de ces fonctions. Donc, si l'on égale à zéro le produit de toutes ces fonctions, l'équation qu'on obtiendra, sera, sans aucun facteur étranger à la question, l'équation finale résultante de l'élimination de x, y et z entre les quatre équations données. C'est donc de cette équation qu'il s'agit de déterminer le degré.

Or le premier membre de l'équation (m) est de la forme

$$u^m + Au^{m-1} + Bu^{m-2} + \ldots\ldots + K,$$

$A, B, C \ldots\ldots K$ représentant des polynomes en x, y, z, savoir, A le polynome le plus général du premier degré, B le polynome le plus général du second et ainsi de suite, et il en résulte d'abord que le premier terme du produit des fonctions en question sera u^{mn}, et que, dans tous les autres termes, la somme des exposans de u et des valeurs ci-dessus de x, y, z,

ne sera jamais plus grande que mn. De plus, sans effectuer le produit de ces fonctions, on voit qu'il doit être tel, qu'il reste le même lorsqu'on y échange a_p en a_q, b_p en b_q, c_p en c_q, et réciproquement, quels que soient les indices p et q ; car si l'on opérait ces changemens dans les fonctions elles-mêmes, on ne ferait autre chose qu'échanger entre elles deux de ces fonctions. Si donc ce produit doit renfermer un terme tel que $u^s a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$, etc. (dans lequel s, k, l, r, etc. représentent des exposans entiers positifs, dont la somme est moindre que mn, ou égale à ce nombre, et ou p, p', p'' etc. sont des indices différens entre eux), il devra aussi contenir tous les termes que l'on peut déduire de celui-là, en y mettant sucessivement pour p, p', p'' etc. tous les nombres possibles depuis 1 jusqu'à n inclusivement, pourvu que l'on ne mette jamais dans un même terme, le même nombre pour deux de ces indices. La somme de tous ces termes est une certaine fonction de u, que nous désignerons désormais par

$$u^s T.a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$$

et dont il faut déterminer la forme.

Pour cela, soit l'équation

$$t = x + gy + hz$$

dans laquelle t est une nouvelle inconnue et g et h sont des coefficiens arbitraires. En éliminant x, y et z entre cette équation et les équations (a), (b) et (c), on obtiendra une équation du degré n en u et t.

En effet, les équations (a), (b) et (c) ne pouvant devenir identiquement nulles qne par un nombre n de systèmes convenables de valeurs de x, y et z, ainsi qu'on l'a dit plus haut, on ne doit pas avoir plus de valeurs de t en u, qu'on ne peut prendre de ces systèmes : partant, l'équation finale entre t et u doit être du degré n, c'est-à-dire, de la forme

$$t^n + Mt^{n-1} + Nt^{n-2} + \ldots\ldots + S = 0,$$

$M, N \ldots\ldots S$, étant des fonctions rationnelles et entières de u, et le plus haut exposant de cette inconnue étant un dans M, deux dans N, et ainsi de suite.

Les n racines de cette équation seront

$$a_1 + gb_1 + hc_1\,;\; a_2 + gb_2 + hc_2 \ldots a_n + gb_n + hc_n,$$

en sorte que $T(a_p + gb_p + hc_p)^i$ qui désigne la somme des puissances i de ces quantités sera, i étant un nombre entier et positif, une fonction rationnelle et entière des coefficiens M, N, etc. : ce sera donc une fonction rationnelle et entière de u, et il résulte des formules trouvées (1re sect., n°. 3[illegible]) que le plus haut exposant de u, dans cette fonction, sera égal à i. Mais le terme général de la fonction $T(a_p + gb_p + hc_p)^i$ développée suivant les puissances et les produits des quantités g et h, pouvant être représenté par $Lg^l h^r T.a_p^k . b_p^l c_p^r$, k, l, r étant des exposans entiers et positifs dont la somme $= i$, et L étant une certaine fonction de ces nombres, on peut dire que $T.a_p^k b_p^l c_p^r$ est une fonction rationnelle et entière de u, dans laquelle le plus haut exposant de cette inconnue est $i = k + l + r$. Il suit de là que la fonction ci-dessus $u^s T.a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$, est une fonction rationnelle et entière de u, dans laquelle le plus haut exposant de cette inconnue, est à la somme des exposans s, k, l, etc., car on a l'équation

$$T.a_p^k b_p^l c_p^r \times T.a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'} = T.a_p^{k+k'} b_p^{l+l'} c_p^{r+r'}$$
$$+ T.a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$$

qui fait voir que si cette proposition est démontrée pour la fonction $T.a_p^k b_p^l c_p^r$, elle le sera aussi pour $T.a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$ et ainsi de suite.

Cela posé, on a vu plus haut que le premier membre de

l'équation finale en u, le second étant zéro, a pour premier terme u^{mn}, et que le reste de ce premier membre ne peut être autre chose que la somme d'un nombre fini de fonctions pareilles à la précédente, multipliées chacune par un coefficient connu, et dans lesquelles la somme des exposans s, k, l, etc. n'est jamais plus grande que mn : ce premier membre est donc une fonction rationnelle de u, dans laquelle mn est le plus haut exposant de cette inconnue, et par conséquent ce nombre mn marque le degré de l'équation finale.

On prouvera de même en généralisant les raisonnemens ci-dessus, en les appliquant à un nombre quelconque d'équations complètes, que si n désigne le degré de l'équation finale résultante de toutes les équations moins une, et que m soit le degré de celle-ci, le degré de l'équation finale résultante de toutes les équations, sera égal à mn : d'où il est facile de conclure que ce degré sera égal au produit des exposans des équations données, puisque pour trois équations complètes entre trois inconnues, la première du degré a, la seconde du degré b, et enfin la troisième du degré m, on a $n = ab$, ainsi qu'il a été démontré précédemment.

Dans tout ce qui précède, on a supposé que les équations entre lesquelles il s'agissait d'éliminer, étaient les plus générales de leur degré ; mais lorsque cela n'aura pas lieu, on conçoit que le degré de l'équation finale pourra être moindre que celui qu'on vient de déterminer, c'est-à-dire, que les coefficiens des plus hautes puissances de l'inconnue dans l'équation finale, pourront se trouver nuls en vertu des valeurs particulières des coefficiens des inconnues dans les équations données. On doit donc dire, en général, que le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations, ne peut jamais être plus grand que le produit des exposans de ces équations.

L'auteur ajoute : « Je me proposais seulement de déterminer, » *à priori*, le degré de l'équation finale résultante d'un nombre » quelconque d'équations complètes ; mais on a pu voir qu'en » suivant la marche indiquée par l'analyse précédente, on

» parviendrait à former cette équation finale; mais la longueur des calculs qu'entraîne cette méthode la rend presque » toujours impraticable. Ainsi, dans la pratique, pour obtenir » l'équation finale à son véritable degré, il faudra recourir » aux méthodes que l'on trouve exposées avec beaucoup de » détails dans la Théorie des équations de *Bezout*.

CHAPITRE VII.

Résolution générale des équations.

29. Le but de la résolution générale des équations est de trouver pour toutes les équations d'un même degré, les fonctions des coefficiens de ces équations propres à en représenter toutes les racines : ce problême a été résolu par les premiers algébristes sur les équations des second, troisième et quatrième degrés; ils parvinrent à transformer l'équation à résoudre en une autre susceptible d'être résolue à la manière d'une équation d'un degré moindre, et à déterminer, au moyen des racines de cette nouvelle équation qu'on a nommée réduite, toutes celles de la proposée. Mais, dès le troisième degré, ces fonctions racines se présentent sous une forme telle qu'il est impossible d'en tirer les valeurs numériques des racines par la simple substitution de celle des coefficiens, dans le cas même où toutes les racines sont essentiellement réelles : c'est cette difficulté que les analystes désignent par le nom de cas *irréductible;* elle aurait lieu, à plus forte raison dans les équations des degrés supérieurs, s'il était possible de les résoudre par des formules générales. Heureusement, ajoute *Lagrange*, on a trouvé moyen de la vaincre dans les troisième et quatrième degrés, par la considération de la trisection des angles et par le secours des tables trigonométriques, ainsi qu'on le verra dans l'un des chapitres suivans; mais ce moyen qui dépend de la division des angles, n'est applicable, dans les degrés plus élevés, qu'à une

classe très-limitée d'équations ; et on peut assurer d'avance, que quand meme on parviendrait à résoudre généralement le cinquième degré et les suivans, on n'aurait par-là que des formules algébriques, précieuses en elles-mêmes, mais très-peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations des mêmes degrés, et qui, par conséquent, ne dispenseraient pas d'avoir recours aux méthodes arithmétiques exposées dans les chapitres précédens.

30. La résolution générale se réduit donc à la recherche d'une fonction des racines, qui dépende d'une équation d'un degré moindre, et dont les racines donnent facilement celles de la proposée.

Soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

et nommons a et b ses deux racines ; on a d'abord

$$a + b = -p \ldots\ldots (1)$$

Il ne s'agit donc plus que d'avoir la valeur d'une autre fonction des racines, qui, combinée avec la précédente, détermine chacune d'elles au moyen d'équations du premier degré seulement : cette fonction sera donc de la forme

$$Aa + Bb$$

A et B étant des coefficiens indépendans des racines a et b. La fonction $Aa + Bb$ est susceptible de deux combinaisons dont la seconde s'obtient en changeant dans la première a en b, et réciproquement ; elle dépend donc d'une équation du second degré, excepté le cas où

$$A = B;$$

mais alors on retombe sur la somme des racines, qui est déjà connue. Puisqu'on est conduit pour la détermination de la fonction $Aa + Bb$ à une équation du second degré, il faut que cette équation puisse se résoudre par une simple extraction de la racine quarrée ; mais alors les deux racines de-

viennent égales et de signes contraires : il faut donc déterminer les coefficiens A et B de manière que la fonction $Aa + Bb$ reste la même au signe près, en y changeant a en b, et réciproquement, condition qui donne

$$Aa + Bb = -(Ab + Ba),$$

équation qui doit avoir lieu, quels que soient les nombres a et b ; on en tire en égalant les coefficiens de a

$$A = -B;$$

comparant ensuite ceux de b, on retrouve la même relation ; en sorte que la condition $A = -B$ étant la seule à laquelle il faille satisfaire, on pourra prendre

$$A = 1, \text{ d'où } B = -1.$$

La fonction cherchée sera donc $a - b$, et la désignant par z, sa valeur dépendra de l'équation

$$[z-(a-b)][(z-(b-a)] = 0,$$

dont les coefficiens pourront être exprimés d'une manière rationnelle au moyen de ceux de la proposée, puisque les racines a et b y entrent de la même manière. En effectuant les multiplications, on trouve

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Or des deux équations

$$a^2 + pa + q = 0$$
$$b^2 + pb + q = 0,$$

on déduit

$$a^2 + b^2 = p^2 - 2q,$$

en observant que $a + b = -p$; on a d'ailleurs

$$ab = q;$$

donc

$z^2 = p^2 - 4q$; d'où $z = \sqrt{p^2 - 4q} = a - b \ldots\ldots (2)$

Combinant les égalités (1) et (2) par voie d'addition et de soustraction, on obtient

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

31. Nous passerons à l'équation du troisième degré, que, pour plus de simplicité, nous supposerons délivrée de son second terme, ou ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

Soient a, b et c ses trois racines ; on aura d'abord

$$a + b + c = 0 \ldots\ldots (K).$$

Reste à déterminer une autre fonction des racines, qui ne dépende que d'une équation du second degré, et qui, combinée avec l'égalité (K), donne facilement les expressions des racines de la proposée. La forme la plus simple que l'on puisse supposer à cette fonction, est celle-ci

$$Aa + Bb + Cc,$$

A, B, C étant des coefficiens indépendans de a, b, c : si on y fait tous les échanges possibles des racines a, b, c, on aura ces six combinaisons différentes

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb + Cc \\ Aa + Bc + Cb \\ Ab + Ba + Cc \\ Ab + Bc + Ca \\ Ac + Bb + Ca \\ Ac + Ba + Cb \end{array}\right\} (M)$$

Ainsi l'équation d'où dépendra cette fonction sera du sixième degré,

degré ; il faudra donc, pour qu'on ait ramené la question à des termes plus simples, que cette équation soit résoluble à la manière de celles du second degré ; en sorte que les quantités A, B, C, devant être déterminées par la condition qu'il existe entre les fonctions (M) la même relation qu'entre les racines de l'équation

$$y^6 + my^3 + n = 0.$$

Pour résoudre celle-ci, on fera

$$y^3 = t$$

ce qui la transforme dans la suivante

$$t^2 + mt + n = 0,$$

dont les racines sont

$$t' = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

$$t'' = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

et on obtiendra les six valeurs de y par la résolution des équations

$$y^3 - t' = 0, \; y^3 - t'' = 0,$$

qui, par les hypothèses

$$y = z\sqrt[3]{t'}, \; y = z\sqrt[3]{t''}$$

deviennent, après avoir divisé la première par t', et la seconde par t''

$$z^3 - 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$z = 1 \,;\, z = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha \,;\, z = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha'.$$

en sorte que les six valeurs de y seront

$$y=\sqrt[3]{t'},\ y=\alpha\sqrt[3]{t'},\ y=\alpha'\sqrt[3]{t'}$$
$$y=\sqrt[3]{t''},\ y=\alpha\sqrt[3]{t''},\ y=\alpha'\sqrt[3]{t''}$$

ou, parce que $\alpha=\alpha^2$,

$$y=\sqrt[3]{t'},\ y=\alpha\sqrt[3]{t'},\ y=\alpha^2\sqrt[3]{t'}$$
$$y=\sqrt[3]{t''},\ y=\alpha\sqrt[3]{t''},\ y=\alpha^2\sqrt[3]{t''}.$$

Telles sont donc les six racines d'une équation du sixième degré, résoluble à la manière d'une équation du second. Il faut donc que deux des combinaisons (M) étant prises pour $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$, deux des autres soient $\alpha\sqrt[3]{t'}$ et $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$, et que les deux qui restent soient $\alpha\sqrt[3]{t''}$ et $\alpha^2\sqrt[3]{t''}$. Soit

$$Aa+Bb+Cc=\sqrt[3]{t'}\ldots\ldots\ldots(1)$$

la combinaison $Aa+Bc+Cb$ ne peut devenir $\alpha\sqrt[3]{t'}$, ou $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$, parce qu'en comparant les coefficiens des mêmes racines dans les égalités

$$Aa+Bc+Cb=\alpha Aa+\alpha Bb+\alpha Cc$$
$$Aa+Bc+Cb=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bb+\alpha^2 Cc,$$

on aurait

$$A=\alpha A,\ \text{d'où}\ \alpha=1$$
$$A=\alpha^2 A;\ \text{d'où}\ \alpha^2=1,$$

résultats qui ne peuvent avoir lieu: La combinaison $Ab+Ba+Cc$ ne peut devenir $\alpha\sqrt[3]{t'}$ ou $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$, parce que, dans le premier cas, on aurait $\alpha=1$; et, dans le second, $\alpha^2=1$. On ne peut donc faire que les deux hypothèses suivantes,

Digitized by Google

$$Ab+Bc+Ca=\alpha Aa+\alpha Bb+\alpha Cc=\alpha\sqrt[3]{t'}\ldots\ldots(2)$$

$$Ac+Ba+Cb=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bb+\alpha^2 Cc=\alpha^2\sqrt[3]{t'}\ldots\ldots(3)$$

puis écrivant

$$Aa+Bc+Cb=\sqrt[3]{t''}\ldots\ldots(4)$$

on supposera

$$Ac+Bb+Ca=\alpha Aa+\alpha Bc+\alpha Cb=\alpha\sqrt[3]{t''}\ldots\ldots(5)$$

$$Ab+Ba+Cc=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bc+\alpha^2 Cb=\alpha^2\sqrt[3]{t''}\ldots\ldots(6)$$

Comparant les coefficiens des mêmes lettres dans les équations (2), (3), (5) et (6), on déduira

de (2).... $\alpha A=C$; $\alpha B=A$; $\alpha C=B$

de (3).... $\alpha^2 A=B$; $\alpha^2 B=C$; $\alpha^2 C=A$

de (5).... $\alpha A=C$; $\alpha B=A$; $\alpha C=B$

de (6).... $\alpha^2 A=B$; $\alpha^2 B=C$; $\alpha^2 C=A$.

Les équations des deux dernières lignes étant identiquement les mêmes que celles des deux premières, il suffira d'employer celles-ci : or des six premières équations, les trois suivantes

$$C=\alpha A,\ B=\alpha^2 A,\ A=\alpha B \text{ ou } A=\alpha^3 A$$

rendent les trois autres identiques, sans cependant déterminer le coefficient A ; on pourra donc, pour simplifier, faire $A=1$; en sorte que

$$A=1,\ B=\alpha^2,\ C=\alpha.$$

Faisant, pour abréger,

$$\sqrt[3]{t'} \text{ ou } r=a+\alpha^2 b+\alpha c\ldots\ldots(7)$$

$$\sqrt[3]{t''} \text{ ou } s=a+\alpha^2 c+\alpha b\ldots\ldots(8)$$

F 2

on aura r, αr, $\alpha^2 r$; s, αs, $\alpha^2 s$ pour les six racines de la transformée résoluble à la manière d'une équation du second degré ; et nommant y l'inconnue, on trouvera, en observant que $1+\alpha+\alpha^2=0$ et que $\alpha^3=1$

$$(y-r)\ (y-\alpha r)\ (y-\alpha^2 r)=y^3-r^3$$
$$(y-s)\ (y-\alpha s)\ (y-\alpha^2 s)=y^3-s^3,$$

et conséquemment

$$y^6-(s^3+r^3)y^3+r^3s^3=0 \ldots\ldots\ldots (N)$$

équation qui satisfait à la condition énoncée. Il ne s'agit plus que de trouver, en coefficiens de la proposée, les valeurs de r^3+s^3 et de $r^3 s^3$, ce qui est possible, parce que ces quantités sont, comme on va le voir, des fonctions invariables des racines a, b et c.

Si on élève au cube la fonction r, on aura, en observant que $\alpha^3=1$,

$$r^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3\alpha(a^2c+b^2a+c^2b)$$
$$+3\alpha^2(a^2b+b^2c+c^2a),$$

et changeant c en b et réciproquement, r devient s, on aura donc, sans refaire le calcul,

$$s^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3\alpha(a^2b+c^2a+b^2c)$$
$$+3\alpha^2(a^2c+c^2b+b^2a).$$

Soient, pour abréger

$$a^3+b^3+c^3+6abc=L$$
$$a^2b+b^2c+c^2a=M$$
$$a^2c+b^2a+c^2b=N,$$

on aura

$$r^3=L+3\alpha N+3\alpha^2 M$$
$$s^3=L+3\alpha M+3\alpha^2 N,$$

donc la fonction

$$r^3+s^3=2L+3(\alpha+\alpha^2)(M+N);$$

mais, comme nous l'avons déjà observé,

$$1+\alpha+\alpha^2=0, \text{ donc } \alpha+\alpha^2=1,$$

et conséquemment

$$r^3+s^3=2L-3(M+N) \ldots\ldots (P)$$

Faisant ensuite le produit de r^3 par s^3, il viendra; toutes réductions faites,

$$r^3 s^3=L^2-3L(M+N)+9(M+N)^2-27MN \ldots (Q)$$

Pour évaluer L d'une manière plus abrégée qu'en employant les formules données (1ere sect., n° 301), on partira des trois équations

$$a^3+pa+q=0$$
$$b^3+pb+q=0$$
$$c^3+pc+q=0,$$

desquelles on déduit

$$a^3+b^3+c^3=-3q,$$

à cause de $a+b+c=0$, et on a d'ailleurs

$$abc=-q,$$

donc

$$L=-9q.$$

Reste à calculer $M+N$ et MN: à cet effet, on a (n° 25)

$$M+N=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$
$$=T.a^2b=T.a^2\times T.a-T.a^3=3q,$$

parce que $T.a=0$; et

$$MN = (a^2 b + b^2 c + c^2 a)(a^2 c + b^2 a + c^2 b)$$
$$= a^4 bc + a^2 b^2 c^2 + a^3 b^3$$
$$+ b^4 ac + a^2 b^2 c^2 + a^3 c^3$$
$$+ c^4 ab + a^2 b^2 c^2 + b^3 c^3;$$

or

$$a^4 bc + b^4 ac + c^4 ab = abc(a^3 + b^3 + c^3) = 3q^2$$
$$a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 = 3(abc)^2 = 3q^2$$
$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 - (a^6 + b^6 + c^6)}{2} = 3q^2 + p^3$$

en observant, par rapport à cette dernière évaluation, que, dans le cas de $n = p$; le deuxième membre de la formule (1), donnée (n° 25), doit être divisé par 2, pour n'exprimer que la collection des termes dissemblables de la forme $\alpha^n \beta^n$. Donc

$$MN = p^3 + 9q^2.$$

Faisant ces substitutions dans (P) et (Q), on trouvera

$$r^3 + s^3 = -27q; \quad r^3 s^3 = -27p^3,$$

de sorte que la réduite (N) deviendra

$$y^6 + 27qy^3 - 27p^3 = 0,$$

laquelle, par l'hypothèse

$$y^3 = t,$$

se change dans la suivante

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0,$$

équation qui donne pour t les deux valeurs

$$t' = 27\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]$$
$$t'' = 27\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]$$

on aura donc

$$r = a + \alpha^2 b + \alpha c = \sqrt[3]{t'}$$

$$s = a + \alpha b + \alpha^2 c = \sqrt[3]{t''}$$

Or les radicaux $\sqrt[3]{t'}$, $\sqrt[3]{t''}$ sont susceptibles chacun de trois valeurs

$$\sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'};\qquad \sqrt[3]{t''},\ \alpha\sqrt[3]{t''},\ \alpha^2\sqrt[3]{t''};$$

mais on observera que les racines de la proposée doivent satisfaire à la condition

$$ab + ac + bc = +p = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{t'} \times \sqrt[3]{t''},$$

d'après les valeurs précédemment trouvées pour t' et t'' : on pourra donc prendre $\sqrt[3]{t'}$ avec $\sqrt[3]{t''}$, ou $\alpha\sqrt[3]{t'}$ avec $\alpha^2\sqrt[3]{t''}$; ou bien $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$ avec $\alpha\sqrt[3]{t''}$, parce qu'on a aussi

$$-3p = \alpha\sqrt[3]{t'} \times \alpha^2\sqrt[3]{t''}$$

$$-3p = \alpha^2\sqrt[3]{t'} \times \alpha\sqrt[3]{t''};$$

en sorte qu'on pourra employer indifféremment l'un ou l'autre de ces trois systèmes d'équation

$$\left\{\begin{array}{l}(1^{\circ}.)\ldots\ldots\ a+b+c=0\\(2^{\circ}.)\ldots\ldots\ a+\alpha^2b+\alpha c=\sqrt[3]{t'}\\(3^{\circ}.)\ldots\ldots\ a+\alpha b+\alpha^2c=\sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots\ldots 1^{\circ}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}a+b+c=0\\\alpha a+b+\alpha^2c=\alpha\sqrt[3]{t'}\\\alpha^2a+b+\alpha c=\alpha^2\sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots\ldots 2^{\circ}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}a+b+c=0\\\alpha^2a+\alpha b+c=\alpha^2\sqrt[3]{t'}\\\alpha a+\alpha^2b+c=\alpha\sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots\ldots 3^{\circ}.$$

pour évaluer les racines a, b et c. Cette multiplicité de valeurs des racines a, b et c tient à ce que $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$ ne contiennent que le cube de p, ensorte que les racines a, b, et c qu'on vient de trouver résolvent, outre la proposée, les deux autres équations

$$x^3+\alpha px+q=0$$
$$x^3+\alpha^2px+q=0.$$

Employant le premier des trois systèmes, ajoutant les trois équations qu'il contient, et faisant toujours attention que $1+\alpha+\alpha^2=0$, il viendra

$$a=\frac{\sqrt[3]{t'}+\sqrt[3]{t''}}{3},$$

multipliant (2°) par α et (3°) par α^2, puis ajoutant, on aura

$$b=\frac{\alpha\sqrt[3]{t'}+\alpha^2\sqrt[3]{t''}}{3},$$

multipliant (2°) par α^2 et (3°) par α, puis ajoutant, on

trouvera

$$c=\frac{\alpha^2\sqrt[3]{t'}+\alpha\sqrt[3]{t''}}{3}.$$

Ecrivant dans a, b et c pour t' et t'' les valeurs obtenues précédemment, on aura enfin

$$a=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$b=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$c=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

32. Soit enfin l'équation générale du quatrième degré, délivrée de son second terme

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

dont a, b, c et d soient les racines. Nous chercherons, comme nous l'avons fait à l'égard des équations des second et troisième degrés, une fonction de ces racines, qui ne dépende que d'une

équation d'un degré inférieur au quatrième, et dont les valeurs combinées avec l'équation

$$a+b+c+d=0$$

donnent facilement les quatre racines. Nous ferons encore l'hypothèse qui a réussi jusqu'ici, savoir, que cette fonction renferme les racines sous une forme linéaire, ou qu'elle soit

$$Aa+Bb+Cc+Dd,$$

A. B, C et D étant des coefficiens indépendans de a, b, c et d. Cette fonction est susceptible de vingt-quatre combinaisons différentes; elle dépendra donc d'une équation du vingt-quatrième degré : mais si on suppose

$$A=B$$

dans ces vingt-quatre combinaisons, elles se reduiront à douze, et si, de plus, on fait

$$C=D,$$

les douze se réduiront à six; en sorte que la fonction

$$A(a+b)+C(c+d)$$

ne dépendra que d'une équation du sixième degré dont les six racines sont

$$\begin{array}{l} A(a+b)+C(c+d) \\ A(c+d)+C(a+b) \\ A(a+d)+C(b+c) \\ A(b+c)+C(a+d) \\ A(a+c)+C(b+d) \\ A(b+d)+C(a+c). \end{array}$$

Ces fonctions, en y faisant encore

$$A=-C,$$

deviendront égales deux à deux et de signes contraires; l'équation dont elles seront les racines ne renfermera donc que les puissances paires de l'inconnue ; conséquemment elle pourra se résoudre à la manière des équations du troisième degré. Ces combinaisons seront

$$A(a+b-c-d);\quad A(c+d-a-b);\quad A(a+d-b-c);$$
$$A(b+c-a-d);\quad A(a+c-b-d);\quad A(b+d-a-c).$$

Supposant, pour plus de simplicité

$$A=1,$$

l'équation cherchée sera donc

$$[z^2-(a+b-c-d)^2][z^2-(a+c-b-d)^2]$$
$$[z^2-(a+d-b-c)^2]=0,$$

ou, faisant $z^2=t$,

$$[t-(a+b-c-d)^2]\,[t-(a+c-b-d)^2]$$
$$[t-(a+d-b-c)^2]=0.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer les coefficiens de cette réduite au moyen de ceux de la proposée : or on a

$$(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac-2ad$$
$$-2bc-2bd-2cd+4ab+4cd,$$

et observant que de $(a+b+c+d)\ (a+b+c+d)=0$ résulte

$$-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

on trouve

$$(a+b-c-d)^2=-4p+4(ab+cd)^2.$$

Changeant dans la relation précédente b en c, et réciproquement, on aura

$$(a+c-b-d)^2 = -4p + 4(ac+bd);$$

changeant dans celle-ci c en d, et réciproquement, il viendra

$$(a+d-b-c)^2 = -4p + 4(ad+cb).$$

L'équation en t devient donc

$$[t+4p-4(ab+cd)][t+4p-4(ac+bd)]$$
$$[t+4p-4(ad+bc)] = 0:$$

ou supposant

$$t = 4u \text{ et } u+p = y,$$

puis divisant par 4, elle se change dans la suivante

$$[y-(ab+cd)]\,[y-(ac+bd)]\,[y-(ad+bc)] = 0,$$

et faisant les multiplications indiqnées

$$y^3 - (ab+ac+ad+bc+bd+cd)y^2 + \left\{\begin{matrix} +(ab+dc)(ac+bd \\ +(ab+dc)(ad+bc \\ +(ac+bd)(ad+bc \end{matrix}\right\} y$$
$$-(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) = 0.$$

Or

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = p \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(ab+cd)(ac+bd) = a^2bc + c^2ad + b^2ad + d^2bc$$
$$(ab+cd)(ad+bc) = a^2bd + d^2ac + b^2ac + c^2bd$$
$$(ac+bd)(ad+bc) = a^2cd + d^2ab + c^2ab + b^2cd:$$

ajoutant ces trois derniers résultats, on trouve, en désignant la somme des trois premiers membres par S

$$S = \left\{\begin{matrix} a(abc+abd+acd+bcd)-abcd \\ +b(abc+abd+acd+bcd)-abcd \\ +c(abc+abd+acd+bcd)-abcd \\ +d(abc+abd+acd+bcd)-abcd \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = -q(a+b+c+d) \\ -4r = -4r \ldots (2) \end{matrix}$$

à cause de $a+b+c+d=0$. Passant au dernier terme, on a

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) = a^3bcd + a^2b^2c^2 + b^3acd + a^2b^2d^2 + c^3abd + a^2c^2d^2 + d^3abc + b^2c^2d^2:$$

or

$$a^3bcd + b^3acd + c^3abd + d^3abc = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,abcd = -2pr \;\ldots\ldots\; (3)$$

Pour évaluer la fonction $a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$, on développera

$$(abc + abd + acd + bcd)^2 = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 + 2a^2b^2cd + 2a^2c^2bd + 2a^2d^2bc + 2b^2c^2ad + 2b^2d^2ac + 2c^2d^2ab,$$

d'où on tire

$$\left.\begin{array}{l} a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \\ = (abc + abd + acd + bcd)^2 \\ -2abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \end{array}\right\} = q^2 - 2pr \;\ldots\ldots\; (4)$$

Substituant ces valeurs (1), (2), (3), (4) dans l'équation en y, elle deviendra

$$y^3 - py^2 - 4ry + 4pr - q^2 = 0:$$

mettant pour y sa valeur $u + p$, on aura pour résultat

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)\,u - q^2 = 0.$$

Soient u', u'', u''' les trois racines de cette équation, on trouvera, en observant que $t = 4u$,

$$(a + b - c - d)^2 = 4u'$$
$$(a + c - b - d)^2 = 4u''$$
$$(a + d - b - c)^2 = 4u''':$$

d'où

$$a+b-c-d=\pm 2\sqrt{u'}\ldots\ldots(1)$$
$$a+c-b-d=\pm 2\sqrt{u''}\ldots\ldots(2)$$
$$a+d-b-c=\pm 2\sqrt{u'''}\ldots\ldots(3)$$

Les équations (1), (2) et (3) combinées avec

$$a+b+c+d=0\ldots\ldots(4)$$

donnent, en prenant les radicaux avec le signe $+$

$$a=\tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}]$$
$$b=\tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'}-\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}]$$
$$c=\tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'}+\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}]$$
$$d=\tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'}-\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}].$$

Chacun des radicaux pouvant être pris avec le signe $-$, il en résulte pour a, b, c et d ces quatres valeur

$$a=\tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'}-\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}]$$
$$b=\tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}]$$
$$c=\tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'}-\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}]$$
$$d=\tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'}+\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}].$$

Mais on a

$$(a+b-c-d)\,(a+c-b-d)\,(a+d-b-c)$$
$$=2(a^3+b^3+c^3+d^3)+2(abc+abd+acd+bcd)=-8q,$$

en sorte que le coefficient q étant positif dans la proposée, il faudra prendre un ou trois radicaux négativement : s'il est négatif, on pourra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus. Cette considération réduit donc les huit racines à quatre.

33. Passons à l'examen des racines des équations des troisième et quatrième degrés.

On a prouvé (n° 5) qu'une équation d'un degré quelconque a toutes ses racines réelles lorsque l'équation aux quarrés des différences de ces racines n'a que des variations de signes ; mais que si elle contient seulement une permanence, la proposée doit avoir au moins deux racines imaginaires. Ces conditions ont été appliquées (n° *idem*) à l'équation du troisième degré, et on a trouvé que dans le cas de

$$p < 0 \text{ et } \frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$$

les trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

étaient réelles ; mais si l'une de ces inégalités n'a pas lieu, deux des racines de la proposée sont imaginaires. On parvient aux mêmes conclusions en discutant les formules des racines de l'équation du troisième degré.

Reprenons-donc les trois racines obtenues précédemment

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$b = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$c = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si p est positif, ou si $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$ dans le cas de p négatif, la racine $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ sera réelle, et conséquemment aussi la première racine a ; mais b et c seront imaginaires, comme il est facile de le déduire de la forme même de ces racines. En effet, si on pose

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=m$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=n;-\frac{1}{2}=l,\frac{\sqrt{3}}{2}=k,$$

on aura

$$b=(l+k\sqrt{-1})\,m+(l-k\sqrt{-1})\,n$$
$$=l(m+n)+k(m-n)\sqrt{-1}$$
$$c=(l-k\sqrt{-1})\,m+(l+k\sqrt{-1})\,n$$
$$=l(m+n)-k(m-n)\sqrt{-1}$$

quantités imaginaires de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$, puisque k, l, m et n sont des quantités réelles. Dans le cas de

$$p < 0 \text{ et } \frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}$$

on a $m = n$, et

$$a=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ b=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ c=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

en sorte que les trois racines sont encore réelles, et les deux dernières égales entre elles.

Les

Les trois racines sont encore réelles dans le cas où celles de la réduite du second degré sont imaginaires, c'est-à-dire, lorsque la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ qui se trouve sous le signe radical, est négative, et on sait, *à priori*, qu'effectivement elles le sont; car la condition

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

suppose ces deux-ci

$$p<0 \text{ et } \frac{q^2}{4}<\frac{p^3}{27}.$$

Alors on peut poser

$$a=\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$$

$$b=(l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}$$
$$+(l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$$

$$c=(l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}$$
$$+(l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}};$$

et on n'apperçoit plus aussi facilement, d'après la forme de ces racines, comme elles sont toutes trois réelles. En admettant le développement en série de $\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}$ et $\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$, on trouve que les termes imaginaires disparaissent par l'opposition des signes dans la première, et que, les multiplications faites dans les deux autres, les résultats ne contiennent plus que des termes réels; mais toutes trois sont alors données par des suites infinies, et comme on n'a pu, jusqu'ici, les obtenir sous une forme en même temps réelle

et finie, à moins d'employer les lignes trigonométriques, comme on le verra plus loin, on a désigné cette circonstance sous le nom de *cas irréductible*.

34. Nous examinerons donc à quoi tient l'introduction d'une imaginaire dans ces racines qu'on sait, *à priori*, devoir être réelles. A cet effet nous reprendrons l'équation

$$x^3+px+q=0.$$

En supposant que a, b et c soient les trois racines, on aura

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=x^3+px+q,$$

d'où résultent ces égalités

$$a+b+c=0;\ ab+ac+bc=p;\ abc=-q.$$

Comme l'équation proposée est d'un degré impair, on est assuré d'avance qu'elle a, au moins, une racine réelle, et la désignant par c, on déduira de

$$c=-(a+b)$$

que la somme $a+b$ des deux autres racines est aussi réelle. Cette valeur substituée dans les deux dernières équations, donnera

$$a^2+ab+b^2=-p;\ ab(a+b)=q;$$

d'où il faudrait conclure a et b. La dernière donne

$$ab=\frac{q}{a+b}$$

donc ab est aussi une quantité réelle. Considérons maintenant la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ ou $27q^2+4p^3$ du signe de laquelle dépend le cas irréductible : si on l'exprime au moyen de a et de b, on trouvera, après les réductions faites,

$$27q^2+4p^3=-(2a^3-2b^3+3a^2b-3ab^2)^2,$$

d'où

$$\sqrt{-(27q^2+4p^3)} = 2a^3 - 2b^3 + 3a^2b - 3ab^2$$
$$= (a-b)(2a^2+2b^2+5ab) = (a-b)\{2(a+b)^2+ab\}$$

Or les deux quantités $a+b$ et ab sont réelles, comme on l'a déjà vu ; donc, pour que la différence $a-b$ soit réelle, il faut que la quantité $(27q^2+4p^3)$ soit négative, ce qui est le cas irréductible ; d'où il suit qu'alors les deux autres racines a et b seront aussi réelles. Cherchons maintenant à évaluer les racines a et b en coefficiens de la proposée : nous avons trouvé l'équation

$$a^3 - b^3 + \tfrac{3}{2}a^2b - \tfrac{3}{2}ab^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\sqrt{27q^2+4p^3}\,:$$

ajoutant au premier membre $m \times ab\,(a+b)$, et au second mq qui n'est autre chose que $-mabc$, à cause de

$$a+b+c=0,$$

on aura

$$a^3 - b^3 + (\tfrac{3}{2}+m)\,a^2b + (m-\tfrac{3}{2})\,ab^2 =$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\sqrt{27q^2+4p^3} + mq \ldots\ldots (1)$$

Il s'agit de déterminer m par la condition que le premier membre devienne un cube parfait : à cet effet, on le comparera avec

$$(\alpha a - \alpha^2 b)^3 = a^3 - b^3 - 3\alpha a^2b + 3\alpha^2 ab^2$$

α et α^2 étant $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; d'où on déduit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{2}+m = -3\alpha = -3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \\ -\frac{3}{2}+m = 3\alpha^2 = +3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} m = \frac{-3\sqrt{-3}}{2} \\ m = \frac{-3\sqrt{-3}}{2} \end{array}\right.$$

On a aussi

$$(\alpha^2 a - \alpha b)^3 = a^3 - b^3 - 3\alpha^2 a^2 b + 3\alpha a b^2,$$

et comparant avec le premier membre de (1), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{2} + m &= -3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \\ -\tfrac{3}{2} + m &= 3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} m &= \frac{3\sqrt{-3}-3}{2} \\ m &= \frac{3\sqrt{-3}-3}{2} \end{aligned}\right.$$

On a donc pour déterminer a et b, les deux équations

$$\alpha a - \alpha^2 b = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\sqrt{27q^2+4p^3} - \frac{3\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}\,q\right]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{-3\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}\left\{q - \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right\}\right]} = P$$

$$\alpha^2 a - \alpha b = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\sqrt{27q^2+4p^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}\,q\right]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{+3\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}\left\{q + \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right\}\right]} = Q$$

Reste donc à éliminer a et b entre les deux équations,

$$\alpha a - \alpha^2 b = P \ldots (2)$$
$$\alpha^2 a - \alpha b = Q \ldots (3):$$

à cet effet, multipliant (2) par α^2 et (3) par α, puis retranchant le premier produit du second, on aura

$$b = \frac{\alpha Q - \alpha^2 P}{\alpha - \alpha^2} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}$$
$$+ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}};$$

puis multipliant (2) par α et (3) par α^2, et retranchant le premier produit du second, il viendra

$$a=\frac{\alpha^2 Q-\alpha P}{\alpha-\alpha^2}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}$$

$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}.$$

Mais de $a+b+c=0$, on déduit $c=-(a+b)$, et conséquemment

$$c=\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}$$

Ces racines sont, en écrivant a pour c, b pour a et c pour b, celles qu'on a précédemment obtenues, et on a remarqué que l'imaginaire $\sqrt{-1}$ était nécessairement introduite pour favoriser l'extraction de deux racines cubiques, et fournir deux fonctions linéaires des racines, qui, combinées avec $c=-(a+b)$, servissent à évaluer les trois racines de la proposée.

Haros, *Géomètre du Cadastre*, a démontré, comme il suit que les trois racines seront réelles, si p est négatif et si, de plus,

$$\frac{1}{27}p^3 = \text{ ou } > \frac{q^2}{4}.$$

A cet effet, soit a la racine réelle de l'équation

$$x^3+px+q=0:$$

on aura donc aussi

$$a^3+pa+q=0, \text{ d'où } q=-a^3-pa,$$

d'où encore

$$x^3-a^3+p(x-a)=0,$$

et divisant par $x-a$,

$$x^2 + ax + a^2 + p = 0,$$

qui renferme les deux autres racines de la proposée, et donne

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}a^2 - p}.$$

Pour que ces deux valeurs de x soient réelles, on doit avoir

$$p < 0 \text{ et } \tfrac{3}{4}a^2 = \text{ ou } < p, \text{ ou } a = \text{ ou } < \sqrt{\frac{4p}{3}}.$$

Mais si dans le second membre de

$$q = -a^3 + pa$$

on écrit au lieu de a la quantité égale ou plus petite $\sqrt{\frac{4p}{3}}$, on aura aussi

$$q = \text{ ou } < -\frac{4p}{3}\sqrt{\frac{4p}{3}} + p\sqrt{\frac{4p}{3}},$$

ou réduisant

$$q = \text{ ou } < -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{4p}{3}}; \text{ donc } q^2 = \text{ ou } < \frac{4p^3}{27},$$

ou enfin

$$\frac{q^2}{4} = \text{ ou } < \frac{p^3}{27}.$$

Les deux racines seront imaginaires, si l'on a

$$\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}.$$

35. Reprenons l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

pour laquelle on a trouvé précédemment

$$a = \frac{1}{2}\left\{ + \sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''} \right\}$$
$$b = \frac{1}{2}\left\{ + \sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''} \right\}$$
$$c = \frac{1}{2}\left\{ - \sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''} \right\}$$
$$d = \frac{1}{2}\left\{ - \sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''} \right\}$$

dans le cas de q négatif, et

$$a = \frac{1}{2}\left\{ - \sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''} \right\}$$
$$b = \frac{1}{2}\left\{ - \sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''} \right\}$$
$$c = \frac{1}{2}\left\{ + \sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''} \right\}$$
$$d = \frac{1}{2}\left\{ + \sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''} \right\}$$

lorsque q est positif, u', u'', u''' étant les trois racines de la réduite du troisième degré

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0.$$

Si les racines u', u'' et u''' sont réelles et positives, il est visible que les quatre racines de la proposée seront réelles; mais si parmi les racines de la réduite, il y en a de négatives, les quatre racines de la proposée seront imaginaires; il faut cependant en excepter le cas où des trois racines réelles de la réduite, l'une u' est positive, et les autres u'' et u''' sont négatives et égales; car alors des quatre racines a, b, c et d, deux seront réelles, et les deux autres imaginaires. Ainsi, outre la condition de la réalité des trois racines de la réduite, il faudra encore, pour le premier cas, suivant la règle de *Descartes*, que les coefficiens des termes de cette réduite, soient alternativement positifs et négatifs, et que par conséquent on ait

$$p < 0 \text{ et } p^2 > 4r.$$

Si l'une de ces conditions manque, la proposée aura ses quatre racines imaginaires, à moins qu'on ne tombe dans le cas ci-

dessus cité. Si la réduite n'a qu'une seule racine réelle, on observera d'abord qu'à cause du dernier terme négatif de cette réduite, la racine réelle sera nécessairement positive : les deux racines imaginaires seront de la forme $f \pm g\sqrt{-1}$: prenant donc u' pour la racine réelle, u'' et u''' pour les deux imaginaires, les deux racines a et b seront réelles, puisque (n°. 2) $\sqrt{f+g\sqrt{-1}} + \sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle $= \sqrt{2f+2\sqrt{f^2+g^2}}$ et, au contraire, $\sqrt{f+g\sqrt{-1}} - \sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ est une quantité imaginaire ; en sorte que des quatre racines trouvées, les deux premières seront réelles, et les deux autres imaginaires.

36. Nous rapporterons ici la méthode qui paraît avoir servi à la première résolution des équations du troisième degré, et qu'on appelle communément méthode de *Cardan*, quoiqu'il semble, dit *Lagrange*, que c'est de *Hudde* que nous la tenons.

Toute équation du troisième degré, privée de son second terme, est de la forme

$$x^3+px+q=0:$$

supposons

$$x=y+z$$

ce qui revient à partager le nombre x en deux parties y et z, dont l'une pourra conséquemment être prise à volonté, pourvu que l'autre en soit le complément à x : la substitution dans la proposée donnera la transformée

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0;$$

or $3y^2z+3yz^2=3yz(y+z)$, de sorte qu'on aura

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0.$$

Si maintenant on suppose à z une valeur telle qu'il en résulte

$$3yz+p=0 \ldots\ldots (1)$$

il restera

$$y^3+z^3+q=0\,\ldots\ldots\ldots\,(2)$$

équations au moyen desquelles on pourra évaluer y et z, et conséquemment x. De la première on tire

$$z=-\frac{p}{3y},$$

substituant dans la seconde et réduisant, on obtient cette équation du sixième degré qu'on appelle la réduite

$$y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

laquelle ne contenant que deux puissances de l'inconnue dont l'une est le double de l'autre, est résoluble à la manière des équations du second degré, et donne sur le champ

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

et extrayant la racine cubique

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

mais

$$x=y+z=y-\frac{p}{3y},$$

en mettant pour z sa valeur $-\frac{p}{3y}$, et d'ailleurs

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\times\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)=-\frac{p}{3}$$

d'où on déduit

$$-\frac{p}{3y}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

donc

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

expression où l'on voit que le radical quarré qui se trouve sous le radical cubique est pris en plus et en moins, en sorte qu'il ne peut y avoir aucune ambiguité. Soient α et α^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et

$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

on aura

$$y=\sqrt[3]{A}\ \ldots\ldots\ x=\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\sqrt[3]{A}}$$

$$y=\alpha\sqrt[3]{A}\ \ldots\ldots\ x=\alpha\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\alpha\sqrt[3]{A}}$$

$$y=\alpha^2\sqrt[3]{A}\ \ldots\ldots\ x=\alpha^2\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\alpha^2\sqrt[3]{A}};$$

mais à cause de

$$\sqrt[3]{B}=-\frac{p}{3\sqrt[3]{A}},\quad \alpha^3=1 \text{ d'où } \frac{1}{\alpha}=\alpha^2 \text{ et } \frac{1}{\alpha^2}=\alpha,$$

les trois racines de la proposée seront exprimées ainsi qu'il suit :

$$x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$

$$x=\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B}$$

$$x=\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}.$$

On aurait pu parvenir directement aux résultats que nous venons de trouver, en remarquant que les équations (1) et (2) donnent

$$y^3+z^3=-q \text{ et } y^3 z^3=-\frac{p^3}{27},$$

d'où l'on conclut, sur-le-champ, que y^3 et z^3 sont les racines d'une équation du second degré dont la première puissance de l'inconnue sera multipliée par q et dont le terme connu sera $-\frac{p^3}{27}$: cette équation sera donc

$$u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0,$$

et nommant A et B ses deux racines, on aura

$$y=\sqrt[3]{A},\ z=\sqrt[3]{B},$$

A et B ayant les mêmes acceptions que ci-dessus. Or on a

$$y=\sqrt[3]{A},\ y=\alpha\sqrt[3]{A},\ y=\alpha^2\sqrt[3]{A}$$
$$z=\sqrt[3]{B},\ z=\alpha\sqrt[3]{B},\ z=\alpha^2\sqrt[3]{B},$$

d'où on croirait pouvoir conclure neuf racines; mais l'équation

$$yz=-\frac{p}{3}$$

dont nous n'avons employé que le cube, limite le nombre de ces combinaisons, et il est aisé de voir que les valeurs de z qu'on doit combiner par voie d'addition avec $\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$ sont $\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$: d'où résultent les trois valeurs de x trouvées plus haut.

37. On peut aussi parvenir aux formules des racines du quatrième degré, d'une manière moins directe que celle qui a été exposée ci-dessus, mais qui, d'un autre côté, a l'avantage d'être analogue à celle de *Cardan*, pour le troisième degré. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on supposera

$$x = y + z + t,$$

et on aura d'abord

$$x^2 = (y^2 + z^2 + t^2) + 2(yz + yt + zt),$$

et quarrant de nouveau

$$x^4 = (y^2 + z^2 + t^2)^2$$
$$+ 4(y^2 + z^2 + t^2)(yz + yt + zt) + 4(yz + yt + zt)^2;$$

d'ailleurs,

$$(yz + yt + zt)^2 = y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2 + 2yzt(y + z + t):$$

substituant ces valeurs de x, x^2, x^4 dans la proposée, et rassemblant les termes qui se trouvent multipliés par $y + z + t$, ainsi que ceux qui ont pour facteur commun $yz + yt + zt$, on aura la transformée

$$(y^2 + z^2 + t^2)^2 + p(y^2 + z^2 + t^2)$$
$$+ [4(y^2 + z^2 + t^2) + 2p]\{yz + yt + zt\}$$
$$+ 4(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + (8yzt + q)(y + z + t) + r = 0.$$

Maintenant, à l'imitation de l'hypothèse qui a réussi dans la résolution de l'équation du troisième degré, nous supposerons

$$8yzt + q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$4(y^2 + z^2 + t^2) + 2p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

et il restera l'équation

$$(y^2 + z^2 + t^2)^2 + p(y^2 + z^2 + t^2)$$
$$+ 4(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + r = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Au moyen des équations (1), (2) et (3), on déterminera les trois quantités y, z et t. La seconde donne d'abord

$$y^2+z^2+t^2=-\frac{p}{2},$$

cette valeur substituée dans (3), la change dans la suivante

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4};$$

de plus la première étant élevée au quarré, donne

$$y^2z^2t^2=\frac{q^2}{64};$$

donc, d'après la théorie générale de la formation des équations, les quantités y^2, z^2 et t^2 seront les racines d'une équation du troisième degré de la forme

$$u^3+\frac{p}{2}u^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)u-\frac{q^2}{64}=0,$$

de sorte que si l'on désigne par u', u'' et u''' les trois racines de cette équation qu'on appelle *la réduite*, on aura

$$y=\sqrt{u'},\ z=\sqrt{u''};\ t=\sqrt{u'''}$$

u', u'' et u''' n'ayant pas ici identiquement les mêmes valeurs qu'au n° 32, et la valeur de x sera exprimée par

$$\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}.$$

Comme ces trois radicaux peuvent être pris chacun avec les signes plus et moins, on aurait, en faisant toutes les combinaisons possibles, et rejetant celles qui se répètent, huit valeurs différentes de x. Mais il faut observer que dans l'analyse précédente nous avons employé

$$y^2z^2t^2=\frac{q^2}{64};$$

ou le quarré de

$$yzt=-\frac{q}{8};$$

il faudra donc que le produit des trois quantités x, y et z, c'est-à-dire, des trois radicaux $\sqrt{u'}$, $\sqrt{u''}$, $\sqrt{u'''}$, soit de signe contraire à celui de la quantité q : d'où il suit,

1°. Que q étant une quantité négative, on devra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus, ce qui ne donne que les quatre combinaisons

$$a = +\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$b = +\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$c = -\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$d = -\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$

qui seront conséquemment les quatre racines de la proposée.

2°. Que q étant une quantité positive, il devra se trouver dans l'expression de x ou trois radicaux négatifs, ou un négatif et deux positifs, ce qui fournira les quatre combinaisons

$$a = -\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$b = -\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$c = +\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$d = +\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}.$$

Ces formules sont de même forme que celles auxquelles on est parvenu. (n° 32.)

38. *Euler*, conduit par la forme des racines du second et du troisième degrés, dans les équations sans second terme, qui sont

$$x = \sqrt{a};\ x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

conjectura que celles du quatrième et du cinquième degrés, enfin du degré n, seraient de la forme

$$x = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c};\ x = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c} + \sqrt[5]{d};$$
$$x = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{d} + \text{etc.}$$

le nombre des radicaux étant $n-1$. Mais les difficultés qu'il rencontra dans l'équation du cinquième degré, lui firent modifier la forme précédente, et adopter la loi suivante, à commencer du second degré jusqu'au degré n,

$$x=a\sqrt{u};\quad x=a\sqrt[3]{u}+b\sqrt[3]{u^2};\quad x=a\sqrt[4]{u}+b\sqrt[4]{u^2}+c\sqrt[4]{u^3}$$

. . . .

$$x=a\sqrt[n]{u}+b\sqrt[n]{u^2}+c\sqrt[n]{u^3}+d\sqrt[n]{u^4}+\ldots\ldots+m\sqrt[n]{u^{n-1}},$$

les quantités a, b, c .... m étant indéterminées et en nombre $n-1$. Si l'on suppose

$$\sqrt[n]{u}=y \text{ d'où } y^n-u=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

on aura

$$x=ay+by^2+cy^3+dy^4+\ldots\ldots+my^{n-1}\ldots\ldots (N)$$

Si l'on élimine y entre ces deux équations, 1°. l'équation finale ne montera qu'au degré n; 2°. elle n'aura point de second terme. Pour donner un exemple simple de ce procédé d'élimination sur lequel on peut consulter l'algèbre de *Bezout*, dans la résolution des équations des 3e et 4e degrés, posons les deux équations

$$y^3-1=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$ay^2+by+x=0\ \ldots\ldots (2)$$

Pour éliminer y, je multiplie la dernière par y, et mettant pour y^3 sa valeur déduite de la première, j'ai

$$by^2+xy+a=0\ldots\ldots\ldots (3)$$

Je multiplie de même celle-ci par y, et remplaçant y^3 par 1, il vient

$$xy^2+ay+b=0\ldots\ldots (4)$$

Des deux équations (2) et (3), je déduis, suivant la méthode des équations du premier degré à deux inconnues, les valeurs

de y^2 et de y que je substitue dans (4), et il vient, après les réductions,

$$x^3 - 3\,a\,b\,x + a^3 + b^3 = 0,$$

équation du 3ᵉ degré, sans second terme. On voit qu'après avoir éliminé y^2 entre les équations (2) et (3), y ne renfermera x qu'à la première puissance, en sorte que dans y^2 entrera x^2 et la substitution pour y^2 et pour y dans (4), donnera un polynome du 3ᵉ degré en x : ce raisonnement est facile à généraliser.

Reste à faire voir que l'équation finale sera sans second terme. A cet effet, désignons par α, β, γ, δ, les quatre racines, autres que l'unité, de l'équation

$$y^5 - 1 = 0,$$

en sorte que, pour l'équation du cinquième degré, les cinq expressions

$$y = \sqrt[5]{u}$$

seront

$$y = \sqrt[5]{u},\ y = \alpha\sqrt[5]{u},\ y = \beta\sqrt[5]{u},\ y = \gamma\sqrt[5]{u},\ y = \delta\sqrt[5]{u},$$

et les cinq racines

$$x = a\sqrt[5]{u} + b\sqrt[5]{u^2} + c\sqrt[5]{u^3} + d\sqrt[5]{u^4}$$

deviendront

$$x = a\sqrt[5]{u} + b\sqrt[5]{u^2} + c\sqrt[5]{u^3} + d\sqrt[5]{u^4}$$
$$x = a\alpha\sqrt[5]{u} + b\alpha^2\sqrt[5]{u^2} + c\alpha^3\sqrt[5]{u^3} + d\alpha^4\sqrt[5]{u^4}$$
$$x = a\beta\sqrt[5]{u} + b\beta^2\sqrt[5]{u^2} + c\beta^3\sqrt[5]{u^3} + d\beta^4\sqrt[5]{u^4}$$
$$x = a\gamma\sqrt[5]{u} + b\gamma^2\sqrt[5]{u^2} + c\gamma^3\sqrt[5]{u^3} + d\gamma^4\sqrt[5]{u^4}$$
$$x = a\delta\sqrt[5]{u} + b\delta^2\sqrt[5]{u^2} + c\delta^3\sqrt[5]{u^3} + d\delta^4\sqrt[5]{u^4}.$$

Mais en désignant par σ_1 la somme des premières puissances des

des racines, on a

$$\sigma_1 = (1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta)\, a \sqrt[5]{u}$$
$$+ (1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\, b \sqrt[5]{u^2}$$
$$+ (1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3)\, c \sqrt[5]{u^3}$$
$$+ (1 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4)\, d \sqrt[5]{u^4}.$$

Or, pour l'équation

$$y^5 - 1 = 0,$$

comparée avec l'équation (M) (1re sect., n° 301), on a

$$m = 5,\ A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ \text{etc.},\ V = 1,$$

d'où l'on conclut et des formules données (*idem.*)

$$S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ S_4 = 0,\ \text{etc.};$$

donc, pour l'équation finale, $\sigma_1 = 0$, c'est-à-dire, que le coefficient du second terme est nul.

Qu'on compare maintenant l'équation finale résultante de l'élimination de y entre les équations (M) et (N) avec la proposée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots\ldots\ldots + V = 0,$$

on obtiendra $n-1$, équations entre n indéterminées A, B, C..... V et u : on pourra donc disposer de l'une d'elles, de u, par exemple, qu'on pourra faire $= 1$. Dans cette hypothèse, on tombe sur les équations auxiliaires

$$y^n - 1 = 0,$$
$$x = ay + by^2 + cy^3 + \ldots\ldots\ldots + my^{n-1}$$

qui sont les mêmes que celles employées par *Bezout*, dans la résolution des équations. A cette occasion nous dirons en quoi

consiste la méthode de ce géomètre. L'équation à résoudre étant

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + V = 0,$$

il prend les équations auxiliaires

$$y^n - 1 = 0,$$
$$ay^{n-1} + by^{n-2} + cy^{n-3} + \ldots\ldots + x = 0,$$

et, par un procédé d'élimination absolument analogue à celui que nous avons pratiqué plus haut sur un exemple particulier, il élimine y, et il est conduit à une équation finale en x de même degré que la proposée et sans second terme, ayant pour coefficiens des fonctions différentes des indéterminées a, b, c, d, etc. Egalant chacun de ces coefficiens au coefficient de même puissance de x dans la proposée, il obtient un nombre suffisant d'équations pour déterminer a, b, c, etc : ces valeurs, ainsi que les n racines de l'unité, reportées pour a, b, c, etc. et pour y dans

$$x = -(ay^{n-1} + by^{n-2} + cy^{n-3} + \text{etc.})$$

donnent toutes les racines x de la proposée.

Theveneau, auteur de notes très-étendues sur l'algèbre de *Clairaut*, a essayé de parvenir par cette analyse à la réduite du cinquième degré

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

à cet effet, il a employé les deux équations auxiliaires

$$y^5 - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

et multipliant celle-ci quatre fois de suite par y, et remplaçant chaque fois y^5 par sa valeur $+ 1$, il est parvenu aux quatre équations

$$by^4 + cy^3 + dy^2 + xy + a = 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$
$$cy^4 + dy^3 + xy^2 + ay + b = 0 \dots\dots\dots\dots (4)$$
$$dy^4 + xy^3 + ay^2 + by + c = 0 \dots\dots\dots\dots (5)$$
$$xy^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \dots\dots\dots\dots (6);$$

et après avoir éliminé entre les équations (2), (3), (4) et (5), y^4, y^3, y^2 et y, et substitué les valeurs dans (6), il a trouvé, après les réductions,

$$\begin{aligned} x^5 &- 5(ad + bc)x^3 + 5(bd^2 + c^2d + a^2c + ab^2)x^2 \\ &+ 5(a^2d^2 + b^2c^2 - cd^3 - b^3d - a^3b - ac^3 - abcd)x \\ &+ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + 5(a^2bc^2 + a^2b^2d + b^2cd^2 + ac^2d^2 \\ &\qquad - a^3cd - ab^3c - abd^3 - bc^3d) = 0; \end{aligned}$$

égalant alors le coefficient de x^3 à p, celui de x^2 à q, de x à r, enfin tous les termes sans x à s, on aura quatre équations pour déterminer a, b, c et d. Mais, ajoute ce géomètre, la longueur des calculs a toujours empêché jusqu'ici de parvenir à la réduite.

CHAPITRE VIII.

De la décomposition des équations en facteurs d'un degré supérieur au premier.

39. On a quelquefois besoin de décomposer effectivement une équation en facteurs d'un degré supérieur au premier. Nous avons prouvé (nº 3) la possibilité de cette décomposition, et nous nous proposons, dans ce chapitre, de faire connaître les divers procédés que l'on peut employer à cet effet.

Prenons pour premier exemple une équation du quatrième degré, délivrée de son second terme, telle que

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0:$$

qu'on se propose de décomposer en facteurs du second degré, qui seront de la forme

$$(x^2+ax+b)\,(x^2-ax+c)=0,$$

en observant qu'on n'a supposé les seconds termes affectés des mêmes coefficiens, pris avec des signes contraires, qu'à l'effet d'avoir un produit sans second terme, comparable avec la proposée. On aura donc l'identité

$$x^4+px^2+qx+r=x^4+(b+c-a^2)x^2+a(c-b)x+bc=0;$$

d'où résultent les égalités entre les coefficiens

$$b+c-a^2=p;\ a(c-b)=q;\ bc=r,$$

desquelles on déduit

$$c=\frac{r}{b};\ a=\frac{q}{c-b};\ a^2=c+b-p.$$

Il faut donc, 1°. que, pour chaque couple de diviseurs c et b, la différence $c-b$ soit un diviseur de q ou du coefficient de x dans la proposée, et que de plus le quotient soit positif; 2°. que le coefficient de x^2, retranché de la somme $c+b$, ait pour racine le quotient précédent. Si l'une de ces conditions manquait, la décomposition supposée serait impossible.

Faisons une application à l'équation

$$x^4-19\,x^2-100\,x-91=0,$$

pour laquelle on a

$$p=-19,\ q=-100;\ r=-91.$$

Les diviseurs de 91 sont

$$1,\ 7,\ 13,\ 91:$$

on n'a donc que les quatre combinaisons de diviseurs

$$+1, -91; -1, +91; +7, -13; -7, +13;$$

les deux premières, de quelque manière qu'on les prenne, ne peuvent donner un diviseur de q ou de -100; quant aux deux dernières, à cause de q négatif, il faut prendre

$$c=-7 \text{ avec } b=+13,$$

ou

$$c=-13 \text{ avec } b=+7.$$

En effet, on trouve également

$$a=\frac{q}{c-b}=+5;$$

mais on doit avoir encore

$$b+c-p=25,$$

condition qui ne peut avoir lieu qu'en supposant

$$c=-7 \text{ et } b=+13:$$

on a donc pour les deux facteurs du second degré

$$x^2+5x+13=0;\ x^2-5x-7=0.$$

Reprenons les égalités

$$bc=r;\ b+c=p+a^2;\ c-b=\frac{q}{a},$$

trouvées précédemment : si l'on ajoute les deux premières, puis, qu'on retranche l'une de l'autre, il viendra

$$(1)\ \ldots c=\frac{p+a^2+\frac{q}{a}}{2};\ b=\frac{p+a^2-\frac{q}{a}}{2}\ldots(2):$$

multiplions b par c, nous aurons, à cause de $bc=r$,

$$r = \frac{(p+a^2)^2 - \frac{q^2}{a^2}}{4}$$

donc

$$p^2 + 2a^2p + a^4 - \frac{q^2}{a^2} = 4r,$$

ou

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0;$$

ou, posant $a^2 = a'$,

$$a'^3 + 2pa'^2 + (p^2 - 4r)a' - q^2 = 0.$$

Pour l'équation déjà traitée

$$x^4 - 19x^2 - 100x - 91 = 0,$$

on a, par la comparaison,

$$p = -19;\ q = -100;\ r = -91,$$

conséquemment,

$$a'^3 - 38a'^2 + 725a' - 10000 = 0;$$

mais les diviseurs du dernier terme doivent être des quarrés pris négativement; on ne devra donc retenir de 10000 que les diviseurs

$$-1, -4, -16, -25, -100, -400, -625, -2500, -10000;$$

le diviseur -25, pris en signe contraire, est racine; donc

$$a' = 25 \text{ et } a = 5;$$

des équations (1) et (2) on déduit alors

$$c = -7;\ b = +13,$$

et on retrouve les mêmes facteurs du second degré.

Terminons par la recherche des diviseurs commensurables

du troisième degré, et proposons-nous, à cet effet, de trouver ceux de l'équation générale du sixième degré

$$x^6+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0 :$$

je suppose maintenant que cette équation provienne des facteurs

$$x^3+ax^2+bx+c\,;\; x^3-ax^2+dx+f :$$

si on les multiplie et qu'on compare les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouvera

(1°) .... $b+d-a^2=p$; (2°)....$c+f+ad-ab=q$;
(3°)....$af-ac+bd=r$; (4°)...$bf+cd=s$; (5°)...$cf=t$

$$\left.\begin{array}{l}(1^\circ)\text{ donne } b+d=a^2+p\\ (2^\circ)\text{ donne } b-d=\dfrac{c+f-q}{a}\end{array}\right\}\text{donc}\left\{\begin{array}{l}b=\dfrac{a^3+ap+c+f-q}{2a}\;(6^\circ)\\ d=\dfrac{a^3+ap-c-f+q}{2a}\;(7^\circ)\end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans (4°), il vient, après les réductions,

$$a^3+\left(p-\frac{2s}{f+c}\right)a+(f-c)\left(1-\frac{q}{f+c}\right)\ldots\ldots(8^\circ).$$

On cherchera donc, puis on disposera, par ordre, tous les diviseurs du dernier terme t de l'équation donnée, et on ne prendra pour c et f que ceux dont le produit soit t en nombre et en signe. D'ailleurs on doit avoir a nombre entier; donc $f+c$ doit être, en même temps, diviseur de $2s$ et de $q\,(f-c)$. Des valeurs de a, c et f, on conclura, au moyen des équations (6°) et (7°), celles de b et d qui doivent être en nombres entiers, et enfin on examinera si l'équation (3°) qu'on n'a pas employée, est satisfaite.

Nous appliquerons cette méthode à l'équation *

$$y^6+6y^5+4y^4-34y^3-59y^2+14y+35=0 :$$

on fera evanouir son second terme, en posant

$$y=x-1,$$

ce qui donne une transformée en x

$$x^6 - 11x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 38x - 5 = 0,$$

pour laquelle on a

$$p = -11,\ q = -10,\ r = 22,\ s = 38,\ t = -5:$$

les diviseurs du dernier terme sont 1 et 5; donc, parce qu'il est négatif, les facteurs c et f sont -1 et $+5$ ou $+1$ et -5. Prenant d'abord -1 et $+5$, on trouve

$$f + c = 4,$$

qui est un diviseur de $2s$ ou de 76, et qui l'est encore de $q(f-c)$ ou de -60. Faisant les substitutions dans (8°), il vient

$$a^3 - 30a + 21 = 0$$

qui n'a pas de diviseurs commensurables du premier degré. Essayons pour c et f les nombres $+1$ et -5: on a d'abord

$$f + c = -4,$$

diviseur de $2s$ et de $q(f-c)$: substituant dans (8°), il vient

$$a^3 + 8a + 9 = 0,$$

qui donne $a = -1$; donc, d'après (6°) et (7°),

$$b = -8 \text{ et } d = -2.$$

Toutes ces valeurs et celle de r, substituées dans (3°) donnent

$$0 = 0;$$

donc les facteurs binomes sont

$$x^3 - x^2 - 8x + 1 = 0,\ x^3 + x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Si dans ces facteurs on fait

$$x = y + 1,$$

on aura, pour les facteurs triples de la proposée,

$$y^3 + 2y^2 - 7y - 7 = 0\,;\; y^3 + 4y^2 + 3y - 5 = 0.$$

40. Ces applications sont plus que suffisantes pour donner une idée de cette méthode et des essais infructueux auxquels on serait exposé si le terme tout connu avait un grand nombre de diviseurs. Nous allons envisager la question sous un autre point de vue, en nous bornant cependant à la décomposition d'une équation du quatrième degré en ses diviseurs du second degré.

Reprenons donc l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

et proposons-nous de la décomposer en deux facteurs du second degré

$$x^2 + Ax + B = 0\,;\; x^2 + A'x + B' = 0.$$

Les racines de la proposée étant α, β, γ, δ, si l'on cherchait l'équation dont les racines fussent les sommes des racines α, β, γ, δ prises deux à deux, on en trouverait une du sixième degré, qui servirait à déterminer le coefficient du second terme des diviseurs du second degré. En effet, les facteurs de la proposée étant $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, il y a lieu à six diviseurs du second degré, dans chacun desquels le coefficient du second terme est la somme de deux des racines de la proposée; ainsi l'équation d'où dépend A, par exemple, doit être du sixième degré. Mais, dans cette équation finale, le coefficient du second terme étant la somme des valeurs de A, prises en signes contraires, vaudra

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 3\delta = -3P,$$

et on le fera disparaître en posant

$$A = y + \frac{3P}{6} \text{ d'où } y = A - \frac{P}{2},$$

en sorte que les racines de l'équation finale seront, en mettant pour A toutes ses valeurs,

$$y = -(\alpha+\beta) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2} \;\ldots\ldots (1)$$

$$y = -(\alpha+\gamma) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\beta+\delta-\alpha-\gamma}{2} \;\ldots\ldots (2)$$

$$y = -(\alpha+\delta) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2} \;\ldots\ldots (3)$$

$$y = -(\beta+\gamma) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2} \;\ldots\ldots (4)$$

$$y = -(\beta+\delta) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2} \;\ldots\ldots (5)$$

$$y = -(\gamma+\delta) + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2} \;\ldots\ldots (6)$$

qui sont égales deux à deux et de signes contraires, ainsi que le montrent (1) et (6), (2) et (5), (3) et (4); par conséquent l'équation en y ne renfermera aucune puissance impaire de y, et elle pourra se réduire à une équation du troisième degré, en z, en posant $y^2 = z$.

Le produit des facteurs correspondans aux six racines de l'équation en y, sera

$$\left[y^2 - \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\right] \left[y^2 - \left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\right]$$
$$\left[y^2 - \left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2\right] = 0,$$

faisant $y^2 = z$, et posant pour équation finale,

$$z^3 - Lz^2 + Mz - N = 0,$$

on aura

$$L=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}M=&\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\\ &+\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2\\ &+\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$N=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2.$$

Or, dans l'hypothèse de $P=0$, pour abréger les calculs, on a

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\gamma)\\ &=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)+2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)\\ &\quad-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=8R;\end{aligned}$$

les autres coefficiens L, M, sont aussi des fonctions invariables de α, β, γ, δ, qui peuvent par conséquent s'exprimer au moyen des coefficiens Q, R et S de l'équation donnée, et l'on trouve par un calcul qui n'a de difficulté qu'un peu de longueur,

$$L=-2Q$$
$$M=Q^2-4S$$

d'ailleurs

$$N=R^2;$$

donc l'équation finale est

$$z^3+2Qz^2+(Q^2-4S)z-R^2=0\ \ldots\ldots\ (7);$$

et comme son dernier terme est essentiellement négatif, elle aura, au moins, deux racines réelles, l'une positive et l'autre

négative (1re sect. n°. 289). Reprenons maintenant l'équation

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

pour laquelle les facteurs du second degré deviennent

$$x^2 + Ax + B = 0;\ x^2 - Ax + B' = 0,$$

on trouvera, après les avoir multipliés l'un par l'autre, et comparé leur produit avec la proposée,

$$B = \frac{A(Q + A^2) - R}{2A};\ B' = \frac{S}{B}.$$

donc on aura nécessairement une valeur réelle pour B et une pour B'. Ainsi les deux facteurs précédens seront réels.

Dans le cas de

$$R = 0,$$

on a

$$z = A = 0 \text{ et } B = \frac{0}{0},$$

la valeur de B est donc indéterminée. Pour voir ce qui se passe ici, reprenons l'équation du quatrième degré et les facteurs du second, qui, dans l'hypothèse actuelle, se réduisent à

$$x^4 + Qx^2 + S = 0$$

$$x^2 + B = 0;\ x^2 + B' = 0;$$

on a donc pour résultats des comparaisons

$$B + B' = Q;\ BB' = S;$$

en sorte que la valeur de B sera donnée par la résolution d'une équation du second degré dont l'une des racines sera prise pour B et l'autre pour B'. Ainsi la valeur de B, déduite de

$$B=\frac{A(Q+A^2)-R}{2A}$$

ne devenait $\frac{0}{0}$ pour $R=0$, d'où résultait $A=0$, que parce que l'expression de B étant rationnelle, n'était pas propre à donner deux valeurs de B, et cependant on ne devait pas plutôt obtenir l'une que l'autre.

L'équation du second degré qui donne les deux valeurs de B, est

$$B^2-QB+S=0,$$

de laquelle on déduit

$$B=\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S};\ B'=\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S};$$

donc les facteurs doubles de

$$x^4+Qx^2+S=0,$$

seront

$$(8)\ldots x^2+\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S};\ x^2+\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S}\ldots(9).$$

Dans le cas de S positive et $>\frac{1}{4}Q^2$, si l'on pose

$$\tfrac{1}{2}Q=f;\ \tfrac{1}{4}Q^2-S=-g^2,$$

on trouvera les quatre facteurs du premier degré

$$\begin{array}{l|l} x+\sqrt{-f-g\sqrt{-1}} & x+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}} \\ x-\sqrt{-f-g\sqrt{-1}} & x-\sqrt{-f+g\sqrt{-1}}; \end{array}$$

si l'on multiplie entre eux ceux de la première ligne, et l'un par l'autre ceux de la seconde, on trouvera d'abord

$$x^2+\left\{\sqrt{-f-g\sqrt{-1}}+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}}\right\}x+\sqrt{f^2+g^2}$$
$$x^2-\left\{\sqrt{-f-g\sqrt{-1}}+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}}\right\}x+\sqrt{f^2+g^2},$$

qui, d'après (n°. 2), se transforment dans les suivans

$$x^2+x\sqrt{-2f+2\sqrt{f^2+g^2}}+\sqrt{f^2+g^2}$$
$$x^2-x\sqrt{-2f+2\sqrt{f^2+g^2}}+\sqrt{f^2+g^2}$$

qui sont réels, tandis que les facteurs (8, et (9) sont imaginaires, ce qui vient de ce qu'on a les combinés d'une manière différente.

Il est maintenant très-facile de comprendre qu'on ne gagnerait rien à décomposer l'équation du troisième degré

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

dans les facteurs

$$x^2+Ax+B \text{ et } x+A';$$

car pour la détermination de A' on serait conduit à une équation du troisième degré, qui serait

$$-A^3+PA^2-QA+R=0 \text{ ou } A^3-PA^2+QA-R=0,$$

puisque de $x+A'=0$ on déduit $x=-A'$: conséquence qui devient plus évidente encore, si l'on considère que A' doit être l'une quelconque des racines de la proposée. Quant au coefficient A, comme il est la somme de deux quelconques des racines de la proposée, on aura pour l'évaluer une équation dont les racines seront

$$-(\alpha+\beta);\ -(\alpha+\gamma);\ -(\beta+\gamma)$$

équation qui s'élevera conséquemment au troisième degré. Le coefficient B sera encore donné par une équation du troisième degré ayant pour racines les produits deux à deux $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. En sorte que quel que soit celui de ces coefficiens qu'on veuille évaluer, pour en conclure les deux autres, on parvient toujours à une équation de même degré que la proposée.

CHAPITRE IX.

De l'extraction des Racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables.

41. Les équations de la forme

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

qui se résolvent par les méthodes du second degré, conduisent souvent à l'extraction de racines de quantités en partie commensurables et en partie incommensurables. Leur solution générale est contenue, ainsi que nous l'avons fait voir (1re sect., n°. 238), dans cette formule

$$x = \sqrt[n]{\left\{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right\}} \ldots (M)$$

Il importe donc que cette expression soit réduite, lorsque cela est possible. Nous avons reconnu (n°. 33) la nécessité d'une telle réduction dans l'examen des racines des équations des degrés supérieurs.

42. Considérons d'abord l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, et cherchons ce que doivent être a et b pour qu'on ait

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{A} + \sqrt{B};$$

élevant au quarré de part et d'autre, il vient

$$a + \sqrt{b} = A + B + 2\sqrt{AB};$$

faisant deux équations, l'une entre les termes commensu-

rables, l'autre entre les termes incommensurables, on trouvera

$$a = A + b; \quad \sqrt{b} = 2\sqrt{AB};$$

quarrant chacune d'elles et retranchant le second résultat du premier, on obtiendra

$$a^2 - b = A^2 - 2AB + B^2, \quad \text{d'où } \sqrt{a^2 - b} = A - B.$$

Des équations

$$A + B = a, \quad A - B = \sqrt{a^2 - b}$$

on déduit

$$A = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}\ ; \quad B = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}.$$

Les quantités A et B ne peuvent donc être rationnelles qu'autant que la quantité $a^2 - b$ est un quarré parfait.

Si l'on compare l'expression (M) avec $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, on trouvera qu'elle est décomposable en deux radicaux $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, dans le cas de

$$n = 2 \text{ et } q = m^2;$$

en effet, on a pour cet exemple

$$a = -\tfrac{1}{2}p, \ b = \frac{p^2}{4} - q, \text{ donc } a^2 - b = +q = m^2,$$

et conséquemment

$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}p + m} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}p - m}.$$

Lorsqu'au lieu de $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, on a $\sqrt{a - \sqrt{b}}$, il faut poser

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{A} - \sqrt{B}.$$

En opérant comme ci-dessus, on parvient à la même condition, et on trouve pour A et B les mêmes valeurs.

Pour

Pour faire une première application de cette méthode, reprenons les formules trigonométriques

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{ \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R \sqrt{R^2 - \sin^2 a} \right\}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{ \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R \sqrt{R^2 - \sin^2 a} \right\}}.$$

Comparant la première avec $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, on aura

$$a = \tfrac{1}{2} R^2,\ b = \tfrac{1}{4} R^4 - \tfrac{1}{4} R^2 \sin^2 a;$$

la quantité

$$a^2 - b = \tfrac{1}{4} R^2 \sin^2 a$$

est un quarré parfait; conséquemment on a

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ R^2 + R \sin a \right\}} - \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ R^2 - R \sin a \right\}}.$$

On trouverait de la même manière

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ R^2 + R \sin a \right\}} + \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ R^2 - R \sin a \right\}}$$

transformées données par *Legendre* dans sa Trigonométrie.

Qu'on cherche la racine quarrée de $2+\sqrt{3}$, on a pour ce cas,

$$a = 2,\ b = 3, \text{ ensorte que } \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Qu'il s'agisse de trouver la racine quarrée de $11 + 6\sqrt{2}$, on a

$$a = 11,\ b = 2.36, \text{ donc } \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}.$$

Cette règle a encore lieu lorsque le binome renferme des quantités imaginaires. Soit, pour exemple, l'expression $\sqrt{1 + 4\sqrt{-3}}$: on a

$$a = 1,\ \sqrt{b} = 4\sqrt{-3}, \text{ d'où } b = -48 \text{ et } a^2 - b = 49,$$

conséquemment

$$\sqrt{1+4\sqrt{-3}}=\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}.$$

Soit encore $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}$, on trouve en comparant $a=-\frac{1}{2}$; $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ et $b=-\frac{3}{4}$; donc $a^2-b=1$, et conséquemment

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Supposons, en dernier lieu, qu'on ait à extraire la racine quarrée de $2\sqrt{-1}$: on a ici

$a=0$, $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$, et $b=-4$; donc $a^2-b=4$,

d'où résulte

$$\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1},$$

dont le quarré est effectivement $2\sqrt{-1}$. On trouvera dans l'Algèbre d'*Euler*, grand nombre d'applications qu'il sera bon de répéter.

On aurait pu supposer

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=A+\sqrt{B},$$

d'où résulte

$$a+\sqrt{b}=A^2+B+2A\sqrt{B},$$

donc

$$a=A^2+B,\ \sqrt{b}=2A\sqrt{B}.$$

Faisant le quarré de chaque équation, et retranchant le second résultat du premier, il vient

$$a^2-b=A^4-2A^2B+B^2=(A^2-B)^2;$$

donc

$$A^2-B=\sqrt{a^2-b}=c \text{ et } B=A^2-c.$$

Substituant cette valeur de B dans celle de a, on aura

$$A^2 = \frac{c+a}{2} \text{ et } A = \sqrt{\frac{c+a}{2}}.$$

Le nombre B sera donc rationnel, lorsque $a^2 - b$ sera un quarré parfait, et alors le nombre A sera donné par un radical du second degré.

43. Passons maintenant à l'extraction de la racine cubique des quantités de la forme $a + \sqrt{b}$, et cherchons les conditions qui doivent être satisfaites pour que cette extraction soit possible. On apperçoit de suite qu'on ne peut supposer

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \sqrt{A} + \sqrt{B},$$

parce que le cube de $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ne contenant que des termes irrationnels, le nombre a ne serait pas commensurable ainsi qu'on l'a supposé.

Cette contradiction cesse d'avoir lieu lorsqu'on suppose

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = A + \sqrt{B},$$

ou, plus généralement,

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = (A + \sqrt{B})z,$$

z étant une indéterminée. Élevant au cube, il viendra

$$a + \sqrt{b} = z^3(A^3 + 3A^2\sqrt{B} + 3AB + B\sqrt{B}),$$

ensorte que

$$a = z^3(A^3 + 3AB); \quad \sqrt{b} = z^3(3A^2 + B)\sqrt{B}.$$

Il faut de ces deux équations déduire A et B; et la forme supposée à la racine cubique n'aura lieu qu'autant qu'on trouvera pour A et pour B des nombres rationnels. Élevant l'une

Digitized by Google

et l'autre équation au quarré, puis retranchant la seconde de la première, on aura

$$\frac{a^2 - b}{z^6} = A^6 - 3A^4B + 3A^2B^2 - B^3 = (A^2 - B)^3,$$

et posant $z^3 = C$, puis extrayant la racine cubique de part et d'autre, il vient

$$A^2 - B = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{C^2}} = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C}.$$

Choisissons C d'après la condition que $(a^2 - b)C$ soit un cube parfait, et posons

$$\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C} = c,$$

nous aurons

$$A^2 - B = c, \text{ d'où } B = A^2 - c.$$

Substituant pour B cette valeur dans celle de a, on trouvera

$$4CA^3 - 3cCA - a = 0.$$

Pour que A et B soient des nombres rationnels, il faut que la dernière équation ait une racine commensurable. On prend $C = 1$, lorsque $a^2 - b$ est un cube parfait.

Soit la quantité $52 + 30\sqrt{3}$, dont on propose d'extraire la racine cubique : on a, par la comparaison,

$$a = 52, \sqrt{b} = 30\sqrt{3}; a^2 - b = 4$$

$$A^2 - B = \frac{1}{C}\sqrt[3]{4C}.$$

Dans cet exemple, pour rendre $4C$ un cube parfait, il faut prendre $C = 2$: on trouve ensuite

$$A^2 - B = 1, \text{ et } 8A^3 - 6A - 52 = 0.$$

Pour préparer cette équation, on fera $2A = y$, d'où

résulte

$$y^3 - 3y - 52 = 0.$$

On trouve pour racine

$$y = 4, \text{ donc } A = 2, \; B = 3,$$

d'où

$$\sqrt[3]{52 + 30\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

Soit, en second lieu, l'expression $-10 + 9\sqrt{-3}$ dont on ait à extraire la racine cubique. Pour ce cas

$$a = -10; \; \sqrt{b} = 9\sqrt{-3}; \; a^2 - b = 343,$$

$$A^2 - B = \sqrt{343}; \text{ donc } C = 1 \text{ et } c = 7,$$

parce que $343 = (7)^3$. L'équation en A devient

$$4A^3 - 21A + 10 = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont

$$A = 2, A = \tfrac{1}{2}, A = -\tfrac{5}{2}; \text{ donc } B = -3, B = -\tfrac{27}{4}, B = -\tfrac{3}{4};$$

d'ou l'on déduirait les trois racines cubiques cherchées.

44. En général, la racine du degré n de l'expression $a + \sqrt{b}$, doit être supposée de la forme $A + \sqrt{B}$: 1°. parce que ce résultat élevé à la puissance n, est comparable avec $a + \sqrt{b}$; 2°. parce qu'il résultera de cette comparaison deux équations, l'une entre les termes rationnels, et l'autre entre les termes incommensurables, desquelles on déduit les valeurs des indéterminées A et B, qui doivent être rationnelles lorsque l'extraction est possible. On introduit dans cette analyse une arbitraire C, qu'on détermine de manière que B ne devienne commensurable on incommensurable que par A, ainsi qu'on le remarque dans la racine précédente. Soit donc à extraire la racine n de $a + \sqrt{b}$, n étant d'abord un nombre impair : on posera

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=(A+\sqrt{B})\sqrt[n]{C},$$

ensorte qu'élevant de part et d'autre à la puissance n, et faisant deux équations, l'une entre les termes rationnels, et l'autre entre les termes incommensurables, on aura

$$a=C\left\{A^n+\frac{n.n-1}{1.2}A^{n-2}B+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}A^{n-4}B^2+\text{etc.}\right\}\ldots(1)$$

$$\sqrt{b}=C\left\{\frac{n}{1}A^{n-1}\sqrt{B}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}A^{n-3}B\sqrt{B}+\text{etc.}\right\}\ldots\ldots\ldots(2)$$

De là il est facile de conclure

$$a=\tfrac{1}{2}C\{(A+\sqrt{B})^n+(A-\sqrt{B})^n\}$$
$$\sqrt{b}=\tfrac{1}{2}C\{(A+\sqrt{B})^n-(A-\sqrt{B})^n\}.$$

En imitant ce qui a été fait précédemment, on retranchera le quarré de la seconde équation de celui de la première, ce qui donnera

$$a^2-b=\tfrac{1}{4}C^2\{(A+\sqrt{B})^{2n}+2(A^2-B)^n$$
$$+(A-\sqrt{B})^{2n}-(A+\sqrt{B})^{2n}+2(A^2-B)^n-(A-\sqrt{B})^{2n}\},$$

et réduisant, on trouvera

$$a^2-b=C^2(A^2-B)^n,\text{ d'où } A^2-B=\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{C^2}}.$$

Il faudra d'abord prendre C de manière que $\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{C^2}}$ devienne une puissance exacte du degré n, que nous désignerons par c, ensorte que

$$B=A^2-c\ldots.(3).$$

Substituant cette valeur pour B dans (1), on aura une

équation du degré n en A, qui devra comporter des racines commensurables, pour que B et A soient des nombres commensurables.

Supposons qu'on ait à extraire la racine cubique de $-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$: on aura

$$n=3,\ a=-3;\ b=-\tfrac{100}{27};\ \frac{a^2-b}{C^3}=\frac{343}{27C^3}=\frac{7^3}{3^3},$$

en posant $C=1$: donc

$$A^2-B=\tfrac{7}{3}, \text{ d'où } B=A^2-\tfrac{7}{3};$$

ensorte que l'équation (1), en y faisant $n=3$ et remplaçant B par sa valeur ci-dessus, donne la suivante

$$4A^3-7A+3=0$$

qui a pour racines $\frac{1}{2}$, $+1$, $-\frac{3}{2}$: les valeurs de B seront donc $-\frac{25}{12}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{12}$ et le binome proposé aura les trois racines cubiques

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{6}\sqrt{-3};\ 1+\tfrac{1}{3}\sqrt{-3};\ -\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{-3}.$$

Dans l'hypothèse de n nombre pair, ou de la forme $2n$, on pourra poser

$$\sqrt[2n]{a+\sqrt{b}}=(\sqrt{A}+\sqrt{B})\sqrt[2n]{C},$$

parce qu'en élevant de part et d'autre à la puissance $2n$, il ne restera dans le second membre que le radical $\sqrt{AB}$: on trouvera

$$a=C\left\{A^n+\frac{2n(2n-1)}{2}A^{n-1}B\right.$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}A^{n-2}B^2+\text{etc.}\right\}\ldots(4).$$

On devra donc avoir

$$\sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{C^2}}=A-B,$$

et il sera toujours possible d'assigner pour C un nombre tel que la différence $A-B$ soit rationnelle.

La racine quatrième du binome $14+8\sqrt{3}$ donne

$$n=2,\ a=14,\ b=192,\ \text{d'où}\ a^2-b=4.$$

Qu'on pose $C=\frac{1}{2}$, on aura

$$A-B=\sqrt[4]{16}=2,\ \text{d'où}\ B=A-2,$$

et l'équation (4) deviendra

$$A^2-2A-3=0;$$

on en déduit $A=3$, $A=-1$ et, pour les valeurs correspondantes $B=1$, $B=-3$. Le système de valeurs $A=3$ et $B=1$ donne

$$\sqrt[4]{14+8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Au reste, on peut toujours, pour n nombre pair ou impair, se servir de la formule (1) pour la détermination de A, et dans le cas de n pair, comme il arrive dans l'exemple ci-dessus, on trouverait une équation du quatrième degré, réductible à une équation d'un degré moitié moindre.

CHAPITRE X.

De l'évanouissement des radicaux dans les équations.

45. L'ÉVANOUISSEMENT des radicaux dans les équations qui en contiennent, ne présente quelques difficultés que lorsque les radicaux entrent dans plusieurs termes. Voici la règle à suivre dans ce cas, pour ramener l'équation à une forme toute rationnelle.

46. *Remplacez chaque radical par une lettre, ce qui donnera une équation sans radicaux, et d'ailleurs autant d'équations que de radicaux : élevez chacune de celles-ci à une puissance égale à l'indice du radical qu'elle contient; puis éliminant entre toutes ces équations les lettres qui représentent les radicaux, il viendra une équation finale qui sera celle qu'on cherche.*

Eclaircissons cette règle par quelques exemples. Soit d'abord l'équation

$$x^2 - \sqrt{ax} + \sqrt[3]{bx^2} = m,$$

posons

$$\sqrt{ax} = y;\ \sqrt[3]{bx^2} = z,$$

hypothèses qui réduisent la proposée à

$$x^2 - y + z = m,$$

d'où on déduit

$$y = x^2 + z - m:$$

élevant au quarré de part et d'autre, remplaçant y^2 par sa valeur ax, et faisant

$$A = (x^2 - m)^2 - ax;\ B = 2x^2 - m,$$

on aura la transformée

$$z^2 + Bz + A = 0 \ldots\ldots (1);$$

mais l'équation $z = \sqrt[3]{bx^2}$ élevée au cube, donne

$$z^3 - bx^2 = 0,$$

et la précédente multipliée par z, devient

$$z^3 + Bz^2 + Az = 0;$$

retranchant la première de la seconde, la différence est

$$Bz^2 + Az + bx^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

multipliant (1) par B, et du produit retranchant (2) on trouve

$$(B^2 - A)z + BA - bx^2 = 0,$$

d'où

$$z^3 = \frac{(bx^2 - BA)^3}{(B^2 - A)^3} = b^2x^4,$$

et faisant disparaître le dénominateur, on parvient à

$$bx^2(B^2 - A)^3 = (bx^2 - BA)^3.$$

Après avoir remplacé B et A par leurs valeurs, fonctions rationnelles de x; on trouvera une équation du dix-huitième degré.

Soit, en second lieu,

$$\sqrt{ax} - \sqrt{a^2 - ax} = 2a + \sqrt[3]{ax^2} \ldots (1)$$

pour en faire disparaître les radicaux, posons

$$t = \sqrt{ax};\ v = \sqrt{a^2 - ax},\ y = \sqrt[3]{ax^2} \ldots\ldots (2)$$

substitutions qui transformeraient la proposée dans la suivante

$$t - v = 2a + y:$$

c'est de cette équation qu'il faut successivement éliminer t, v et y, pour n'avoir plus qu'une équation rationnelle en x. Elle donne d'abord

$$y = t - v - 2a, \text{ ou } y = t - r$$

en faisant

$$r = v + 2a;$$

donc

$$y^3 \text{ ou } ax^2 = t^3 - 3t^2 r + 3tr^2 - r^3 \quad \ldots\ldots (3)$$

et puisque $t = \sqrt{ax}$, on a

$$t^2 = ax;\ t^3 = tax;$$

substituant pour t^2 et t^3 leurs valeurs dans (3), cette équation devient

$$ax^2 = atx - 3arx + 3tr^2 - r^3 \quad \ldots\ldots (4)$$

d'ailleurs,

$$r^2 = v^2 + 4av + 4a^2 = 5a^2 + 4av - ax;$$

en mettant pour v^2 sa valeur $a^2 - ax$, donc

$$-r^3 = -v^3 - 6av^2 - 12a^2 v - 8a^3,$$

et remplaçant v^2 par $a^2 - ax$ et v^3 par $a^2 v - avx$, on trouve, après les réductions,

$$-r^3 = -14a^3 - 13a^2 v + avx + 6a^2 x.$$

Substituant maintenant dans (4) pour $-r$, $+r^2$ et $-r^3$ leurs valeurs, elle deviendra

$$ax^2 = atx + 3ax(-v - 3a) + 2t(5a^2 + 4av - ax)$$
$$+ (-14a^3 - 13a^2 v + avx + 6a^2 x).$$

Faisant les multiplications indiquées, transposant dans le premier membre les termes affectés de t, et dégageant t, on aura

$$t = \frac{ax^2 + 14a^3 + 13a^2v + 2avx}{15a^2 - 2ax + 12av}$$
$$= \frac{x^2 + 14a^2 + 13av + 2vx}{15a - 2x + 12v}.$$

Elevant tout au quarré, il vient

$$t^2 \text{ ou } ax = \left(\frac{x^2 + 14a^2 + 13av + 2vx}{15a - 2x + 12v}\right)^2.$$

Après avoir développé le quarré, fait évanouir le dénominateur, substitué pour v^2 sa valeur $a^2 - ax$, opéré toutes les réductions, et transporté dans le premier membre tous les termes affectés de v, on aura, en dégageant v; élevant ensuite les deux membres au quarré et remplaçant v par sa valeur $a^2 - ax$

$$a^2 - ax = \left(\frac{x^4 - 8ax^3 + 184a^2x^2 - 486a^3x + 365a^4}{-4x^3 - 74ax^2 + 304a^2x - 364a^3}\right)^2;$$

faisant les opérations indiquées, et ordonnant le résultat par rapport aux puissances de x, on trouve enfin

$$x^8 + 1008a^2x^6 - 1464a^3x^5 - 2762a^2x^4 + 3680a^5x^3$$
$$+ 2916a^6x^2 - 972a^7x + 729a^8 = 0.$$

47. On peut encore se proposer cette question : trouver l'équation qui a donné pour l'une de ses racines

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

Ce problême admet plusieurs solutions. On peut d'abord combiner $\sqrt[3]{A}$ et $\sqrt[3]{B}$ avec les trois racines cubiques de l'unité, ainsi qu'on l'a vu (n° 31), ce qui fournit les neuf combinaisons

$$x - \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B};\ x - \alpha\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B};\ x - \sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B};$$
$$x - \alpha\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B};\ x - \alpha\sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B};\ x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B};$$
$$x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B};\ x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B};\ x - \sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B}.$$

Si l'on multiplie ces facteurs entre eux, et qu'on tienne compte de ces relations entre les racines cubiques de l'unité (n° 31)

$$1+\alpha+\alpha^2=0,\ \alpha+\alpha^2+\alpha^3=0,\ \alpha^3=1,$$

il ne restera dans le produit aucun terme irrationnel.

On peut encore poser

$$t=\sqrt[3]{A} \text{ et } u^3=\sqrt[3]{B},$$

d'où résultent

$$t^3-A=0,\ u^3-B=0,$$

et conséquemment

$$x-t-u=0.$$

Si pour t on écrit ses trois valeurs $\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$; on aura à multiplier les trois facteurs

$$\{(x-u)-\sqrt[3]{A}\}\{(x-u)-\alpha\sqrt[3]{A}\}\{(x-u)-\alpha^2\sqrt[3]{A}\}:$$

or les coefficiens des second, troisième et quatrième termes, étant

$$1+\alpha+\alpha^2=0,\ \alpha+\alpha^2+\alpha^3=0;\ \alpha^3=1,$$

le produit se réduira à

$$(x-u)^3-A=0.$$

Écrivant pour u ses trois valeurs $\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$, ce produit donnera lieu aux trois autres facteurs

$$(x-\sqrt[3]{B})^3-A,\ (x-\alpha\sqrt[3]{B})-A;\ (x-\alpha^2\sqrt[3]{B})-A.$$

Faisant ce produit, et réduisant d'après les relations précédemment établies entre 1, α et α^2, on retombera sur le résultat trouvé par le procédé ci-dessus.

Enfin, la manière la plus simple de résoudre la question énoncée, consiste à faire disparaître les radicaux cubiques par des puissances cubiques successives. On aura d'abord.

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} + B.$$

Transposant dans le premier membre les termes sans radicaux, on trouvera

$$x^3 - A - B = 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2}.$$
$$= 3\sqrt[3]{AB}\left\{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right\};$$

donc

$$x^3 - A - B = 3x\sqrt[3]{AB}.$$

Élevant au cube de part et d'autre, l'irrationnalité disparaîtra, et on parviendra à l'équation cherchée.

$$(x^3 - (A+B))^3 = 27\,ABx^3;$$

laquelle est du neuvième degré, ainsi que la première solution le démontrait *à priori*. Cette équation est réductible au troisième degré, par l'hypothèse

$$x^3 = z$$

CHAPITRE XI.

De l'abaissement des équations.

48. Nous terminerons ce qui regarde la résolution des équations polynomes par l'examen des cas où elles peuvent s'abaisser, c'est-à-dire, être réduites à un degré inferieur à celui sous lequel elles se présentent. Cet abaissement a lieu, lorsqu'il existe une relation particulière entre les racines.

Prenons, pour exemple, l'équation générale

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots\ldots + s = 0$$

dont les racines soient a, b, c, etc. et supposons qu'on sache qu'il existe entre deux ou trois de ces racines, la relation exprimée par

$$ia + kb = l, \text{ ou } ha + ib + kc = l, \text{ etc.}$$

h, i, k, l, etc. étant des nombres donnés. Dans le premier cas, on aura d'abord

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots\dots\dots + s = 0 \dots (1)$$
$$b^m + pb^{m-1} + qb^{m-2} + \dots\dots\dots + s = 0 \dots (2)$$

Mais si de la dernière on élimine b au moyen de la relation

$$ia + kb = l,$$

l'équation résultante, ou l'équation finale qui ne renfermera plus que a, devra nécessairement s'accorder avec (1) ; car comme elles comportent une même racine a, elles auront un commun diviseur qui fera connaître la racine a.

Si l'on avait $i = k$, il est clair que l'équation de relation ci-dessus se changerait en

$$i(a + b) = l,$$

fonction qui demeure la même en changeant a en b, et réciproquement : d'où il suit qu'éliminant a de la première, ou b de la seconde, l'équation finale reste de même forme ; donc le diviseur commun qui doit donner l'une des racines a ou b, donnera l'autre en même temps, et partant il montera au second degré.

Lorsque la relation entre les racines, est exprimée par

$$ha + ib + kc = l,$$

on prend le système des trois équations

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots\dots\dots + s = 0 \dots (1)$$
$$b^m + pb^{m-1} + qb^{m-2} + \dots\dots\dots + s = 0 \dots (2)$$
$$c^m + pc^{m-1} + qc^{m-2} + \dots\dots\dots + s = 0 \dots (3)$$

et éliminant, au moyen des deux dernières, b et c de la relation précédente, on parvient à une équation finale en a, ayant nécessairement avec (1) un diviseur commun qui donne la racine a. Éliminant au moyen de (1) et (3) a et c de la relation proposée, et cherchant entre l'équation finale et (2) le plus grand commun diviseur, on aurait par sa résolution la seconde racine b. On trouverait semblablement la troisième racine c.

Dans le cas de $h = i$, la relation donnée deviendrait

$$h(a+b)+kc=l,$$

ensorte que changeant a en b et réciproquement, cette relation ne change pas; donc le diviseur commun doit donner les racines a et b. Si de plus $h = k$, alors la relation devient

$$k(a+b+c)=l,$$

et le diviseur commun s'élève au troisième degré, et donne les trois racines a, b et c, puisque toutes ces racines jouent exactement le même rôle dans l'équation de relation.

Observons cependant que si l'on donnait entre les m racines une relation indiquée par

$$k(a+b+c+\text{etc.})=l,$$

elle ne pourrait servir à faire connaître l'une d'entre elles, puisque l'on a entre la somme de toutes les racines et le coefficient p, l'équation

$$a+b+c+\text{etc.}=-p,$$

d'où résulterait

$$k(a+b+c+\text{etc.})=-kp, \text{ ou } k=k.$$

Il en serait de même de la somme des produits deux à deux, trois à trois, etc. des racines.

49. Les cas qui se présentent le plus communément et que nous distinguerons, sont les suivans. 1°. lorsque plusieurs racines sont égales

égales, mais de signes contraires; 2°. lorsqu'elles sont absolument égales; 3°. lorsqu'elles sont *réciproques*, c'est-à-dire, que, prises deux à deux, l'une est exprimée par a, et l'autre par $\frac{1}{a}$. Le second cas a été traité (1re sect. ch. XXV) et le troisième sera examiné dans le chapitre suivant.

Prenons donc, pour premier exemple du premier cas,

$$x^3 + px^2 - (p^2 - 2pq + q^2)\,x - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0;$$

et supposons que l'on sache d'avance que, parmi les trois racines de cette équation, il y en a deux qui sont égales, mais de signes contraires. Si nous appellons a et b ces deux racines, nous déduirons d'abord de la proposée les deux suivantes :

$$a^3 + pa^2 - (p^2 - 2pq + q^2)\,a - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0$$
$$b^3 + pb^2 - (p^2 - 2pq + q^2)\,b - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0;$$

mais à cause de

$$a = -b,$$

la dernière se change en

$$-a^3 + pa^2 + (p^2 - 2pq + q^2)\,a - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0.$$

Si l'on cherche le commun diviseur de ces deux équations en a, on trouvera qu'il est

$$a^2 - p^2 + 2pq - q^2:$$

on a donc

$$a = \pm (p - q)\,;\ \text{donc}\ b = -a = \mp (p - q).$$

Donc les deux racines cherchées, sont $p - q$ et $q - p$. On aurait pu, dans cet exemple, arriver aux valeurs ci-dessus, sans passer par le commun diviseur. En effet, si l'on ajoute les deux équations en a^3, on trouve pour somme

$$2pa^2 - 2p^3 + 4p^2q - 2pq^2 = 0,$$

ou $$2p(a^2 - p^2 + 2pq - q^2) = 0;$$

ou, parce que $2p$ n'est pas zéro,

$$a^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0,$$

la même que ci-dessus.

On vient de voir que l'équation au diviseur commun, était du second degré, et cela devait résulter de la relation

$$a = -b,$$

qui donnant $$a + b = 0,$$

demeure la même en y échangeant a en b, et réciproquement. On aurait donc pu résoudre le problême de la manière suivante : le facteur qui renferme les deux racines a et b, doit être

$$x^2 - (a + b)x + ab;$$

mais à cause de

$$a = -b,$$

il devient $$x^2 - a^2.$$

Il faut donc que l'équation proposée soit divisible par ce facteur, et par conséquent, que le reste soit égal à zéro. Or si l'on pousse la division par ce facteur, aussi loin que possible, on trouve pour reste, égal à zéro,

$$(a^2 - p^2 + 2pq - q^2)x + pa^2 - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0.$$

Mais ce reste doit être nul, indépendamment de toute valeur de x, ou pour deux valeurs de x ; il faut donc qu'on ait

$$a^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0; \quad pa^2 - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0:$$

équations qui s'accordent à donner

$$a^2 = (p-q)^2,$$

d'où résulte

$$x^2 - a^2 = x^2 - (p-q)^2, \text{ ou } x = \pm (p-q)$$

comme ci-dessus. De plus, si l'on observe que

$$(a^2 - p^2 + 2pq - q^2)x + pa^2 - p^3 + 2p^2q - pq^2 = 0,$$

revient à

$$(x+p)(a^2 - (p-q)^2) = 0,$$

on aura tout de suite

$$x = p - q;\ x = -(p-q);\ x = -p$$

pour les trois racines de l'équation proposée.

Proposons-nous encore, pour second exemple du même cas, l'équation numérique

$$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 40x^2 + 9x - 36 = 0,$$

et supposons qu'on sache qu'entre les cinq racines a, b, c, d et e, existent les deux relations

$$a = -b;\ \text{et } c = -d, \text{ ou } a + b = 0,\ c + d = 0.$$

Si après avoir formé les deux équations

$$a^5 - 4a^4 - 10a^3 + 40a^2 + 9a - 36 = 0,$$
$$b^5 - 4b^4 - 10b^3 + 40b^2 + 9b - 36 = 0;$$

on met dans cette dernière $-a$ au lieu de b, on aura celle-ci

$$-a^5 - 4a^4 + 10a^3 + 40a^2 - 9a - 36 = 0:$$

laquelle ajoutée à la première, donnera pour somme

$$-8a^4 + 80a^2 - 72 = 0, \text{ ou } a^4 - 10a^2 + 9 = 0.$$

Si l'on fait pour c et d ce qu'on vient de faire pour a et b, on trouvera pour l'équation qui donne c,

$$c^4 - 10c^2 + 9 = 0;$$

d'où il suit que l'une de ces deux équations donne à-la-fois les racines a, b, c et d. En résolvant la première, on trouve, pour les quatre racines,

$$+3, -3, +1 -1.$$

Quant à la cinquième, elle sera $= +4$.

Si au lieu de cette méthode, ou de celle du commun diviseur, on eût voulu se servir de la troisième, il eût fallu diviser d'abord l'équation par $x^2 - a^2$, ce qui eût donné le reste

$$(9 + a^4 - 10a^2)\,x + 40a^2 - 4a^4 - 36,$$

qui, égalé à zéro, fournit les deux équations identiques

$$9 + a^4 - 10a^2 = 0;\ 40a^2 - 4a^4 - 36 = 0,$$

puisque la dernière n'est autre chose que

$$-4\,(9 + a^4 - 10\,a^2) = 0.$$

Mettant x^2 et x^4 pour a^2 et a^4, il viendra, au lieu de la précédente,

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

qui donnera pour x les quatre valeurs ci-dessus.

Enfin l'on peut, d'après l'équation même proposée, et les équations de relation

$$a + b = 0,\quad c + d = 0,$$

obtenir en même temps, et la racine $x = +4$, et l'abaissement de la proposée. En effet, ces deux équations de relation donnent

$$a+b+c+d=0;$$

mais d'ailleurs

$$a+b+c+d+e=4;$$

donc $e=+4$; divisant la proposée par $x-4$, on obtiendra encore

$$x^4-10x^2+9=0.$$

On peut encore observer que l'équation reste trouvée ci-dessus

$$(9+a^4-10a^2)x+40a^2-4a^4-36=0,$$

n'est autre chose que

$$(x-4)(9+a^4-10a^2)=0,$$

qui donne

$$x=+4 \text{ et } a^4-10a^2+9=0.$$

Ces exemples sont plus que suffisans pour fixer les idées sur ce point de théorie, et mettre le lecteur en état de traiter les équations qui rentreront dans la première des trois classes que nous avons énumérées ci-dessus.

CHAPITRE XII.

Réduction des équations réciproques, et résolution des équations de la forme

$x^m \pm a^m=0$; $x^{2m}-2px^m+q=0$.

50. Soit l'équation binome ou à deux termes

$$x^m-a^m=0\ldots\ldots,(1)$$

si on fait

$$x = ay,$$

elle se transformera dans la suivante

$$a^m y^m - a^m = 0, \text{ ou } y^m - 1 = 0 \ldots\ldots (2)$$

La recherche des m valeurs de x dépend donc de la résolution de l'équation (2). On remarquera d'abord que si m est un nombre composé, tel que

$$m = p.q,$$

p et q étant des nombres entiers, la résolution de l'équation (2) se réduira à celle de deux équations semblables, l'une du degré p, l'autre du degré q; car faisant

$$y^q = z,$$

il viendra

$$y^m = z^p, \text{ d'où } z^p - 1 = 0 \ldots\ldots (3)$$

Supposons maintenant qu'on ait résolu cette équation de degré p, et que α soit une des racines, on aura ensuite

$$y^q - \alpha = 0;$$

et faisant

$$y = u\sqrt[q]{\alpha}$$

$\sqrt[q]{\alpha}$ étant la racine donnée par l'opération arithmétique, il viendra

$$u^q - 1 = 0 \ldots\ldots (4);$$

ensorte que les équations (3) et (4) résolues, donneront les $p.q$ racines de la proposée.

Autrement, si l'on décompose l'équation

$$x^{p.q} - 1 = 0$$

dans les deux suivantes

$$x^p - 1 = 0,\ x^q - 1 = 0,$$

et que

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''',\ \text{etc.}$$

soient les racines de la première,

$$\mathit{6},\ \mathit{6}',\ \mathit{6}'',\ \mathit{6}''',\ \text{etc.}$$

celles de la seconde ; on aura, par exemple,

$$\alpha^p - 1 = 0;\ \mathit{6}^q - 1 = 0;\ \text{donc } \alpha^p \mathit{6}^q = 1,$$

et

$$(\alpha^p)^q\ (\mathit{6}^q)^p = 1;\ \text{donc } (\alpha\mathit{6})^{pq} = 1;$$

donc le produit des racines $\alpha\mathit{6}$ est racine de la proposée.

51. On voit donc que la résolution de l'équation

$$y^m - 1 = 0$$

lorsque m n'est pas un nombre premier, dépend de celle d'autant d'équations semblables, que m contient de facteurs simples, les degrés de ces équations étant successivement ces facteurs eux-mêmes.

52. Considérons, en général, le cas de m, nombre impair, ensorte que l'équation à résoudre soit

$$x^{2p+1} - 1 = 0 \ldots\ldots (5).$$

Puisque l'unité est toujours une des valeurs de x, on pourra diviser le premier membre par $x - 1$, et le quotient sera

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + x^{2p-3} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0;$$

divisant par x^p, et rapprochant les termes équidistans de celui du milieu, on aura

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \ldots\ldots + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$$

Soit

$$x+\frac{1}{x}=z, \text{ d'où } x^2-zx+1=0,$$

on obtiendra

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

d'où résulte

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2;$$

on aura

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=z^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3z,$$

d'où l'on déduit

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z.$$

On trouverait de même

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=z^5-5z^3+5z,$$

et, en général,

$$x^m+\frac{1}{x^m}=z^m-mz^{m-2}+\frac{m(m-3)}{2}z^{m-4}$$

$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}z^{m-6}+\text{etc.}$$

en ne continuant la série qu'autant que l'on aura des puissances positives de z. Faisant ces substitutions dans l'équation du degré p, on aura une transformée en z, dans laquelle toutes les puissances de z seront positives, la plus haute étant $=p$, ensorte que cette équation ne sera plus que du degré p : si donc on peut résoudre cette équation, on aura p valeurs de z à chacune desquelles correspondront deux valeurs de x par

la résolution de l'équation

$$x^2 - zx + 1 = 0,$$

et conséquemment $2p$ valeurs de x qui, jointes à la première racine $x = 1$, seront les $2p + 1$ racines de la proposée.

Il résulte de ce qui précède, qu'on pourra obtenir par l'extraction de la seule racine quarrée, les racines des équations

$$x^3 - 1 = 0,\ x^5 - 1 - 0,$$

pour lesquelles on a $p = 1$, $p = 2$: on pourra donc aussi résoudre toute équation

$$x^m - 1 = 0,$$

lorsque m n'aura d'autres facteurs simples que 2, 3 et 5, ou lorsque m sera de la forme $2^\lambda \times 3^\mu \times 5^\nu$. En admettant la résolution des équations du troisième degré, on pourra résoudre l'équation

$$x^7 - 1 = 0,$$

pour laquelle $p = 3$, et conséquemment toute équation $x^m - 1 = 0$ lorsque m sera de la forme $2^\lambda \times 3^\mu \times 5^\nu \times 7^\pi$. Mais la résolution de l'équation

$$x^{11} - 1 = 0,$$

pour laquelle $p = 5$, exigerait celle d'une équation du cinquième degré.

53. Il est visible que toutes les équations dans lesquelles les termes placés à égale distance du premier et du dernier, ont les mêmes coefficiens, et qu'on appelle *équations réciproques*, (n° 49), sont réductibles pour le degré $2m$, au degré m, et pour le degré $2m + 1$, à $\frac{2m - 1}{2}$.

En effet, soit l'équation générale d'un degré pair

$$x^{2m}+px^{2m-1}+qx^{2m-2}+\ldots\ldots+qx^2+px+1=0:$$

la divisant par x^m, puis réunissant les termes réciproques, ou également distans des extrêmes, on aura

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+p\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+q\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\text{etc.}=0,$$

ensorte que remplaçant $x^m+\frac{1}{x^m}$, $x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}$, etc. par les valeurs déduites de la formule générale, la transformée sera du degré m.

Si on a, par exemple, l'équation réciproque du degré impair

$$x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0,$$

on l'écrira comme il suit :

$$x^5+1+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0;$$

et après la division par $x+1$, toujours possible dans ce cas, on a, pour quotient, l'équation réciproque du quatrième degré

$$x^4+(p-1)x^3-(p-q-1)x^2+(p-1)x+1=0.$$

54. Revenons aux équations binomes : lors même qu'on ne peut trouver algébriquement les racines de l'équation

$$x^m-1=0,$$

il est cependant toujours possible de les exprimer au moyen de la division de la circonférence en m parties égales.

A cet effet, nous démontrerons le théorème

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^m=\cos m\varphi+\sin m\varphi\sqrt{-1},$$

m étant un nombre entier. Supposant le rayon $=1$, on a la

formule

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

dont le premier membre peut être regardé comme le produit des deux facteurs imaginaires

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}, \text{ et } \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}.$$

Si l'on multiplie ensemble deux facteurs semblables

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}, \text{ et } \cos\varphi' + \sin\varphi'\sqrt{-1},$$

on aura pour produit

$$\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + (\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi)\sqrt{-1}$$

qui se réduit à la forme

$$\cos(\varphi+\varphi') + \sin(\varphi+\varphi')\sqrt{-1},$$

laquelle est la même que celle de chacun des facteurs. Il est remarquable que la multiplication de ces sortes de quantités, s'exécute en ajoutant seulement les arcs, ce qui est une propriété analogue à celle des logarithmes. On en conclura successivement

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}) = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1}$$
$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\sqrt{-1}) = \cos 3\varphi + \sin 3\varphi\sqrt{-1}$$
$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})(\cos 3\varphi+\sin 3\varphi\sqrt{-1}) = \cos 4\varphi + \sin 4\varphi\sqrt{-1},$$

etc.

Le premier produit est égal à $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^2$, le second est égal à $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^3$ et ainsi de suite. Donc, en général, m étant un nombre entier, on aura

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m = (\cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1});$$

et prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe moins,

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^m = (\cos m\varphi - \sin m\varphi\sqrt{-1}).$$

Cette propriété résultera encore de la comparaison des séries qui représentent e^x, $\sin x$ et $\cos x$, comme on le verra dans un des chapitres qui suivent. Mais nous avons cru convenable de démontrer la chose ainsi qu'on vient de le voir, afin de ne pas rompre la liaison naturelle des matières.

55. On peut encore parvenir à cette formule très-remarquable

$$\cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m,$$

au moyen de l'algorithme des fonctions. Si l'on fait

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = f.\varphi,$$

f désignant *fonction de*, on aura

$$\cos t + \sin t\sqrt{-1} = f.t;$$

mais le produit des deux premiers membres étant $\cos(\varphi + t) + \sin(\varphi + t)\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, composé en $u + t$, de la même manière que l'un des facteurs l'est en u ou en t, on aura nécessairement

$$\cos(\varphi + t) + \sin(\varphi + t)\sqrt{-1} = f(\varphi + t),$$

c'est-à-dire $\quad f\varphi \times ft = f(\varphi + t).$

Or cette équation est l'équation de définition des fonctions exponentielles. Il suit donc de là que les deux fonctions $f.\varphi$ et $f.t$ sont de telles fonctions, et qu'on a

$$f.\varphi = a^\varphi;\ f.t = a^t,$$

ou $\quad \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = a^\varphi.$

Maintenant il nous est facile de déduire de là le théorême de *Moivre*, m étant un nombre quelconque. En effet, qu'on élève a^φ à la puissance m, ou qu'on écrive $m\varphi$ pour φ, on obtient toujours $a^{m\varphi}$: qu'on opère de l'une et de l'autre ma-

nière sur le premier membre de l'identité précédente, et on obtiendra les deux suivantes

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m = a^{m\varphi}$$

$$\cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1} = a^{m\varphi},$$

qui donnent celles-ci

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1}.$$

On peut en déduire sur-le-champ les deux suivantes :

$$2\cos m\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m + (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^m$$

$$2\sin m\varphi\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m - (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^m.$$

56. Ces préliminaires établis, soit l'équation proposée

$$x^m - 1 = 0;$$

et remarquons que

$$1 = \cos 2\lambda\pi + \sin 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

π désignant la demi-circonférence ; en effet, le cosinus d'un multiple quelconque de la circonférence est l'unité, et le sinus d'un pareil multiple est zéro. Mettons donc au lieu de l'unité cette expression, et nous aurons

$$x^m = \cos 2\lambda\pi + \sin 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

d'où

$$x = \cos\frac{2\lambda\pi}{m} + \sin\frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1}.$$

Au reste, comme le théorême de *Moivre*, ainsi que nous l'avons établi d'abord, suppose que la puissance soit entière, on peut poser

$$x = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}, \text{ d'où } x^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1};$$

et on aura pour résultat de cette substitution

$$\cos m\varphi + \sin m\varphi \,.\, \sqrt{-1} - 1 = 0\,;$$

équation qui sera satisfaite dans le cas de

$$\cos m\varphi = 1 \text{ et } \sin m\varphi = 0.$$

La dernière condition aura lieu en posant

$$m\varphi = k\pi$$

π étant la demi-circonférence, et k un nombre entier quelconque; mais comme le cosinus ne devient égal au rayon que lorsque l'arc est un multiple pair de la demi-circonférence, il faut qu'on ait encore

$$k = 2\lambda\,,\ \text{donc } m\varphi = 2\lambda\pi,\ \text{d'où } \varphi = \frac{2\lambda}{m}\pi.$$

Toutes les racines de la proposée seront donc comprises dans la formule

$$x = \cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi \,.\, \sqrt{-1}\,,$$

et on les obtiendra en faisant successivement $\lambda = 0 \,.\, = 1$, $=$ etc. jusqu'à $m-1$ inclusivement : il serait inutile de faire $\lambda = m$ ou $\lambda > m$, puisqu'il résulterait de ces hypothèses les mêmes valeurs que pour $\lambda < m$: en effet, les arcs que l'on obtiendrait, seraient les mêmes que les précédens augmentés d'un certain multiple de la circonférence.

Nous remarquerons d'abord que toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

sont inégales entre elles, puisque, dans la circonférence, il n'y a pas deux arcs qui aient à la fois même sinus et même cosinus : de plus, il est facile de voir que ces racines seront imaginaires, excepté la première qui répond à $\lambda = 0$, et celle

qui est donnée par $\lambda = \frac{m}{2}$, lorsque m est pair, supposition qui donne $x = -1$: en effet, pour que la partie imaginaire de l'expression de x disparaisse, il faut qu'on ait

$$\sin \frac{2\lambda}{m}\pi = 0,$$

ce qui arrive, 1°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 0 \text{ d'où } \lambda = 0;$$

2°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 1 \text{ d'où } \lambda = \frac{m}{2}:$$

cette dernière condition ne peut être satisfaite que lorsque m est pair, puisque λ doit être un nombre entier. On a dans le premier cas,

$$x = \cos 0 = 1$$

et dans le second

$$x = \cos \pi = -1.$$

Lorsqu'on suppose $\lambda > \frac{m}{2}$, la formule

$$x = \cos \frac{2\lambda}{m}\pi + \sin \frac{2\lambda}{m}\pi \cdot \sqrt{-1},$$

devient

$$x = \cos(\pi + z) + \sin(\pi + z) \cdot \sqrt{-1};$$

mais on sait que

$$\cos(\pi+z) = \cos(\pi-z); \sin(\pi+z) = -\sin(\pi-z);$$

donc

$$\cos(\pi+z) + \sin(\pi+z)\sqrt{-1} = \cos(\pi-z) - \sin(\pi-z) \cdot \sqrt{-1}:$$

or parmi les valeurs de x qui résultent de $\lambda < \frac{m}{2}$, se trouvent

nécessairement celles-ci

$$\cos(\pi - z) + \sin(\pi - z)\sqrt{-1}:$$

donc toutes les valeurs de x sont comprises dans la formule

$$x = \cos\frac{2\lambda}{m}\pi \pm \sin\frac{2\lambda}{m}\pi \cdot \sqrt{-1},$$

ce qui résulte encore de ce que $\sqrt{-1}$ emporte le double signe $\pm$.

Soit, pour premier exemple, l'équation

$$x^5 - 1 = 0$$

pour laquelle $m = 5$: on aura

$$x = \cos\frac{2\lambda}{5}\pi \pm \sin\frac{2\lambda}{5}\pi \cdot \sqrt{-1},$$

et pour $\lambda = 0 \ldots \cos\frac{2\lambda}{5}\pi = 1;\ \sin\frac{2\lambda}{5}\pi = 0,\ x = 1$

$$\lambda = 1 \ldots \cos\frac{2\lambda}{5}\pi = \cos\tfrac{2}{5}\pi;\ \sin\frac{2\lambda}{5}\pi = \sin\tfrac{2}{5}\pi;$$

$$x = \cos\tfrac{2}{5}\pi \pm \sin\tfrac{2}{5}\pi \cdot \sqrt{-1}$$

$$\lambda = 2 \ldots \cos\frac{2\lambda}{5}\pi = \cos\tfrac{4}{5}\pi;\ \sin\frac{2\lambda}{5}\pi = \sin\tfrac{4}{5}\pi;$$

$$x = \cos\tfrac{4}{5}\pi \pm \sin\tfrac{4}{5}\pi \cdot \sqrt{-1}.$$

L'hypothèse de $\lambda = 3$ donnerait

$$x = \cos\tfrac{6}{5}\pi \pm \sin\tfrac{6}{5}\pi\sqrt{-1} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) \pm \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\sqrt{-1}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) \pm \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\sqrt{-1} = \cos\tfrac{4}{5}\pi \pm \sin\tfrac{4}{5}\pi \cdot \sqrt{-1}$$

valeurs déjà trouvées dans l'hypothèse de $\lambda = 2$. La supposition

tion de $\lambda=4$ donnerait

$$x=\cos\tfrac{8}{5}\pi\pm\sin\tfrac{8}{5}\pi.\sqrt{-1}=\cos\left(\pi+\frac{3}{5}\pi\right)\pm\sin\left(\pi+\frac{3}{5}\pi\right)\sqrt{-1}$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{3}{5}\pi\right)\pm\sin\left(\pi-\frac{3}{5}\pi\right)\sqrt{-1}=\cos\tfrac{2}{5}\pi\pm\sin\tfrac{2}{5}\pi\sqrt{-1}\,;$$

valeur correspondante à $\lambda=1$.

Les produits des facteurs correspondans aux racines données par $\lambda=1$ et par $\lambda=2$, sont

$$x^2-2x\cos\tfrac{2}{5}\pi+1=x^2-2x\cos 80^d+1,$$
$$x^2-2x\cos\tfrac{4}{5}\pi+1=x^2-2x\cos 160^d+1,$$

ensorte que

$$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos 80^d+1)(x^2-2x\cos 160^d+1);$$

Soit, pour second exemple, l'équation

$$x^6-1=0,$$

pour laquelle on a $m=6$, et

$$x=\cos\frac{2\lambda}{6}\pi\pm\sin\frac{2\lambda}{6}\pi.\sqrt{-1}:$$

Pour $\lambda=0$, on trouve

$$x=\cos 0^\circ\pm\sin 0^\circ.\sqrt{-1}=+1$$

$\lambda=1\ldots\ldots x=\cos\tfrac{1}{3}\pi\pm\sin\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1}=\cos\tfrac{1}{3}100^d\pm\sin\tfrac{1}{3}100^d\sqrt{-1}$

$\lambda=2\ldots\ldots x=\cos\tfrac{2}{3}\pi\pm\sin\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1}=\cos\tfrac{2}{3}.100^d\pm\sin\tfrac{2}{3}.100^d\sqrt{-1}\,;$

$\lambda=3\ldots\ldots x=\cos\pi\pm\sin\pi\sqrt{-1}=-1.$

Les facteurs réels du second degré seront donc

$$(x^2-1)(x^2-2x\cos\tfrac{1}{3}.100^\circ+1)(x^2-2x\cos\tfrac{2}{3}.100^\circ+1)=x^6-1=0.$$

57. Les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

Fig. 1. se construisent d'une manière fort simple au moyen du cercle : en effet, après avoir divisé la demi-circonférence *ARB* en un nombre m de parties égales et numéroté toutes ces divisions en commençant par l'extrémité à gauche du diamètre, qui sera zéro, qu'on joigne les numéros pairs, on formera une portion de polygone régulier *AMM'* etc : si des sommets des angles de ce polygone on abaisse des perpendiculaires sur le diamètre, elles seront $\sin \frac{2\lambda}{m}\pi$, et les distances au centre seront $\cos \frac{2\lambda}{m}\pi$: ces perpendiculaires représenteront donc les coefficiens de $\sqrt{-1}$ et les distances au centre donneront la partie réelle des racines. Au point A, on a

$$x = \cos 0 + \sin 0 . \sqrt{-1} = +1.$$

Si m est pair, il y aura en B un point de division de numéro pair, pour lequel

$$x = \cos \pi + \sin \pi . \sqrt{-1} = -1.$$

Maintenant dans le cas de $\frac{m}{2}$ nombre pair, il y aura en R un point de division de numéro pair, auquel correspondra

$$x = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{-1} = +\sqrt{-1};$$

et comme une racine imaginaire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ en suppose une autre telle que $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ (n° 2), on aura aussi, dans ce cas,

$$x = -\sqrt{-1}.$$

Les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

se construiraient semblablement : mais alors il faudrait joindre les numéros impairs, et il est visible que les arcs ainsi déterminés seront compris dans $\frac{2\lambda+1}{m}\pi$, et que

$$x = \cos\frac{2\lambda+1}{m}\pi \pm \sin\frac{2\lambda+1}{m}\pi \cdot \sqrt{-1}.$$

sera la formule générale des racines, ce qui se vérifie en élevant la valeur de x à la puissance m et ajoutant l'unité, car on a

$$x^m + 1 = \cos(2\lambda+1)\pi \pm \sin(2\lambda+1)\pi . \sqrt{-1} + 1 = 0.$$

L'équation

$$x^m + 1 = 0$$

n'aura pas de racines réelles dans le cas de m nombre pair, parce que l'extrémité à droite du diamètre, ou le point B, ne peut être le sommet d'un des angles du polygone. Cette conséquence résulte encore de ce que le nombre des racines imaginaires étant toujours pair, il faudrait, dans le cas de m nombre pair, qu'il y eût deux racines réelles, ce qui est impossible, puisque le point A ne peut être le sommet d'un des angles du polygone. Si $\frac{m}{2}$ est impair, un des points de division tombera en R, et on aura, pour ce point,

$$x = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = +\sqrt{-1},$$

et conséquemment une autre racine

$$x = -\sqrt{-1},$$

Dans le cas de m nombre impair, on voit aisément que l'é-

quation proposée ne peut comporter plus d'une racine réelle qui sera -1.

58. Il est facile de déduire de ce qui précède, que toute racine paire, ainsi que toute puissance irrationnelle d'une quantité négative, est imaginaire. En effet

$$-a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times -1^{\frac{1}{n}},$$

or

$$-1 = \cos(2\lambda+1)\pi + \sin(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

et

$$-1^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)\pi + \sin\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)\pi\sqrt{-1},$$

mais pour que le terme qui contient $\sqrt{-1}$ s'évanouisse, il faut que $\frac{2\lambda+1}{n}$ puisse devenir un nombre entier, ce qui est impossible quand n est un nombre pair. On a aussi

$$-1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}\right)\pi + \sin\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}\right)\pi.\sqrt{-1}$$

$$-1^{\sqrt{2}} = \cos(2\lambda+1)\sqrt{2}.\pi + \sin(2\lambda+1)\sqrt{2}.\pi.\sqrt{-1},$$

or on voit que $\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}$ et $(2\lambda+1)\sqrt{2}$ ne seront jamais des nombres entiers.

59. Toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

sont donc comprises dans la formule

$$x = \cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi\sqrt{-1};$$

mais

$$\cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi\sqrt{-1} = \left(\cos\frac{2}{m}\pi + \sin\frac{2}{m}\pi\sqrt{-1}\right)^{\lambda}:$$

donc si l'on suppose

$$\cos\frac{2}{m}\pi + \sin\frac{2}{m}\pi\sqrt{-1} = \alpha,$$

toutes les racines seront représentées par les puissances successives α, α^2, α^3, etc. jusqu'à α^m qui est toujours l'unité, ce qui est évident, puisqu'on a

$$\alpha^m - 1 = 0 \text{ d'où } \alpha^m = 1:$$

ces racines correspondent aux valeurs $\lambda = 1, = 2, \ldots = m$, hypothèses qu'on peut faire, puisque, comme on l'a vu (n° 56), on a la même racine pour $\lambda = 0$, $\lambda = m$.

Dans le cas de m nombre pair, on a $\alpha^{\frac{m}{2}} = -1$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment

60. *Toutes les racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0,$$

peuvent être représentées par les puissances 1re, 2e, 3e, *etc. de l'une quelconque* α^p *de ces racines, pourvu que* m *soit un nombre premier, ou que* p *et* m *soient des nombres premiers entre eux.* Soit, par exemple, $m=3$: les racines seront α, α^2, α^3; si l'on prend à la place de α la racine suivante α^2, on aura les trois racines α^2, α^4, α^6, qui, à cause de $\alpha^3 = 1$, deviennent α^2, α, α^3, les mêmes que les précédentes. De même, pour $m = 5$, les racines seront α, α^2, α^3, α^4, α^5, et si au lieu de α, on prend α^2 qu'on élève aux puissances successives 1, 2, 3, 4 et 5, on aura α^2, α^4, α^6, α^8, α^{10}, qui, à cause de $\alpha^5 = 1$, deviennent α^2, α^4, α, α^3, α^5 : prenant α^3 au lieu de α, les racines deviennent α^3, α^6, α^9, α^{12}, α^{15}, ou α^3, α, α^4, α^2, α^5, et

enfin supposant α^4 pour α, on trouvera α^4, α^8, α^{12}, α^{16}, α^{20}, ou α^4, α^3, α^2, α^1, α^5, de sorte qu'on repassera toujours par les mêmes racines, qui se présenteront dans un ordre différent.

En général, soit α^p l'une quelconque des m racines α, α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^m$, p étant $< m$ et m un nombre premier : prenant cette racine α^p au lieu de α, on aura celles-ci α^p, α^{2p}, $\alpha^{3p} \ldots$ $\ldots \alpha^{mp}$; or, si après avoir ôté de chacun des exposans $2p$, $3p$, $4p \ldots mp$ le plus grand multiple de m qu'il contienne, et désigné les restes en nombre m et chacun $< m$ par p, q, r, s, etc. d'où résulteront les puissances α^p, α^q, $\alpha^r \ldots \alpha^m$, on peut prouver que les nombres $p, q, r, s \ldots m$, dont aucun n'est $> m$, sont tous différens entre eux, nécessairement ils ne pourront être que la suite des nombres $1, 2, 3, \ldots m$ et conséquemment il sera démontré que les racines α^p, $\alpha^q, \ldots \alpha^m$, sont les mêmes que α, α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^m$: or l et k indiquant les quotiens de $4p$ et de $2p$ par m, on aurait

$$4p - lm = s$$
$$2p - km = q;$$

et l'hypothèse de $s = q$, donnerait

$$4p - lm = 2p - km \text{ d'ou } l - k = \frac{2p}{m};$$

donc la différence $2p$ devrait être divisible par m, ce qui est impossible, lorsque m est un nombre premier; donc les nombres p, q, $r \ldots m$ sont tous différens entre eux et les racines α^p, α^q, $\ldots \alpha^m$ sont les mêmes que les racines α, α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^m$.

La démonstration précédente conviendra encore dans le cas où m ne serait pas un nombre premier, pourvu que p et m soient des nombres premiers entre eux.

61. L'équation

$$x^m - 1 = 0$$

manquant de tous les termes intermédiaires entre le premier et le dernier, les sommes des puissances 1re, $2^{eme} \ldots (m-1)^{eme}$ des racines seront nulles, d'après les formules démontrées (1ère sect. n° 301).

Pour l'équation $x^6-1=0$, par exemple, la somme des racines devient

$$\cos.0+\cos\tfrac{1}{3}\pi+\cos\tfrac{2}{3}\pi+\cos\pi=0,$$

ce qui est une propriété du cercle.

La somme des puissances m des racines sera donnée par la formule trouvée (n° *idem*).

$$S_m-AS_{m-1}+BS_{m-2}\ldots\ldots+mV=0,$$

laquelle, en observant que pour

$$x^m-1=0,$$

on a

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ \text{etc.}\ V=-1$$

se réduit à

$$S_m-m=0 \text{ d'où } S_m=m.$$

Les sommes des puissances des racines dont les exposans ne seront pas des multiples de m seront nulles, et celles des puissances des racines dont les exposans seront divisibles par m deviendront égales à m, ce qui résulte immédiatement de la formule T, donnée (n° cité).

Si dans l'équation

$$x^m-1=0,$$

on fait

$$x=\frac{1}{y};$$

on aura la transformée

$$y^m-1=0$$

dont les racines sont $1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha^2}$, etc., ou $1,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2}$, etc., conséquemment

$$1+(\alpha)^{-km}+(\alpha^2)^{-km}+(\alpha^3)^{-km}+\ldots\ldots+(\alpha^{m-1})^{-km}=m,$$

et, d'après ce qui a été observé plus haut,

$$1+(\alpha)^{-(km+r)}+\text{etc.}=0,$$

c'est-à-dire, que les sommes des puissances négatives des racines de l'équation

$$x^6 - 1 = 0,$$

se comportent de la même manière que celles des puissances positives des mêmes racines.

On prouverait de la même manière que les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0,$$

jouissent des propriétés

$$S_{mk} = -m;\ S_{km+r} = 0.$$

62. La résolution de l'équation binome

$$x^m \pm a^m = 0,$$

fournit le moyen de démontrer la propriété du cercle dont l'énoncé est renfermé dans le théorême suivant.

Fig. 2. *Si dans un cercle décrit d'un rayon* = a, *on mène un diamètre quelconque, qu'à partir d'une des extrémités de ce diamètre, on divise la circonférence en* 2m *parties égales, et que l'on désigne par* 0, 1, 2, 3 . . . . . m — 1, *etc., ces divisions, en faisant répondre* 0 *à l'origine, si d'un point quelconque pris sur le diamètre ou sur son prolongement, et du même côté du centre que l'origine des arcs, on mène des droites à tous les points de division, le produit de toutes celles menées aux numéros impairs est égal à la somme des puissances* m *du rayon et de la distance du point fixé au centre; celui de toutes les droites menées aux numéros pairs est égale à la différence des mêmes puissances.*

Du point M', si on abaisse la perpendiculaire $M'P$, on aura

$$\overline{OM'}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM'}^2,$$

mais $M'P$ représente le sinus de l'arc MM' dans le cercle pour le rayon $=a$, et CP en est le cosinus ; on aura, donc en prenant les sinus et cosinus tabulaires calculés pour un rayon égal à l'unité,

$$PM' = a \sin MM'$$
$$CP = a \cos MM' ;$$

d'ailleurs représentant OC par x, on a

$$OP = x - CP = x - a \cos MM'$$

et $$OM'^2 = x^2 - 2ax \cos MM' + a^2 \cos^2 MM' + a^2 \sin^2 MM'$$
$$= x^2 - 2ax \cos MM' + a^2$$

Les valeurs de $\overline{OM''}^2$, $\overline{OM'''}^2$, etc. s'obtiendront en substituant dans celle qu'on a trouvée pour OM' les arcs MM'', MM''', etc. à l'arc MM'. Si on ne prend que les arcs qui répondent aux numéros pairs, et qu'on désigne toujours par π la demi-circonférence, on aura

$$MM'' = \frac{2\pi}{m},\ MM^{\text{IV}} = \frac{4\pi}{m},\ \text{etc.}$$

d'où

$$\overline{OM''}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{m} + a^2$$

$$\overline{OM^{\text{IV}}}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{m} + a^2 ;$$

etc.

Mais les lignes OM'', OM^{IV}, etc. ont leurs correspondantes Om'', Om^{IV}, etc. placées de l'autre côté du diamètre, qui leur sont respectivement égales, ensorte qu'on pourra écrire $OM'' \times Om''$, au lieu de $\overline{OM''}^2$, etc. : on remarquera en même temps que $OM = x - a$. Cela posé, on a vu (nº 56) que les facteurs de l'équation

$$x^m - a^m = 0,$$

m étant impair, sont

$$(x-a),\ (x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+a^2),\ (x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{m}+a^2)\ \text{etc.}$$

ce qui donne

$$x^m-a^m=(x-a)(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+a^2)(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{m}+a^2),$$
etc.

$$=OM\times OM''\times OM^{IV}\times OM^{VI},\text{etc.}\times Om''\times Om^{IV}\times Om^{VI},\text{etc.}$$

Dans le cas de m, nombre pair, parmi toutes les lignes menées du point O aux numéros pairs, se trouveront les lignes OM et OB qui correspondront aux deux extrémités du diamètre.

Les arcs qui aboutissent aux divisions impaires, étant égaux à $\frac{2\pi}{2m}=\frac{\pi}{m}$, $\frac{6\pi}{2m}=\frac{3\pi}{m}$, etc. on trouvera

$$\overline{OM'}^2=x^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{OM'''}^2=x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{OM^{V}}^2=x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{m}+a^2.$$

etc.

Mais, dans le cas de m nombre impair,

$$x^m+a^m=(x+a)(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+a^2)(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{m}+a^2)\text{etc.}$$

substituant donc les valeurs, et observant que $OB=x+a$, on aura

$$x^m+a^m=OB\times OM'\times OM'''\times OM^{V},\text{etc.}\times Om'\times Om'''\times Om^{V},$$
etc.

Dans le cas de m, nombre pair, les extrémités M et B du diamètre porteront des numéros pairs, ensorte que la ligne OB n'entrera plus en facteur.

D'où résulte encore cette propriété dans le cas de m nombre pair : *le produit de toutes les lignes menées du point O à toutes les divisions paires et impaires, en y comprenant celles qui aboutissent aux deux extrémités du diamètre, sera*

$$(x^m-1)(x^m+1)=x^{2m}-1=0.$$

63. Les équations de la forme

$$x^{2m}-2px^2+q=0$$

peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes : en résolvant la précédente à la manière du second degré, on en tire

$$x^m=p\pm\sqrt{p^2-q}.$$

Tant que p^2 sera plus grand que q, les valeurs de x^m seront réelles ; et les représentant par α et β, on aura les deux équations

$$x^m-\alpha=0$$
$$x^m-\beta=0$$

dont on sait trouver les racines d'après ce qui précède.

Lorsqu'on aura $p^2<q$, les valeurs de x^m seront imaginaires, et on leur donnera la forme

$$x^m=p\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-p^2};$$

et faisant

$$p=a,\ \sqrt{q-p^2}=b,$$

on aura

$$x^m=a\pm b\sqrt{-1},$$

et il ne s'agira plus que d'extraire une racine du degré m de l'expression

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Comme on ne peut supposer, en général,

$$a \pm b\sqrt{-1} = \cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1},$$

parce qu'on n'a pas toujours

$$a^2 + b^2 = 1,$$

on fera

$$a = k\cos\varphi,\ b = k\sin\varphi,$$

d'où

$$a^2 = k^2\cos^2\varphi,\ b^2 = k^2\sin^2\varphi,$$

et conséquemment

$$a^2 + b^2 = k^2 \text{ et } k = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{q};$$

donc

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{p}{\sqrt{q}};\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{q-p^2}}{\sqrt{q}},$$

ensorte que

$$a \pm b\sqrt{-1} = k(\cos \pm \sin\varphi\sqrt{-1});$$

mais comme les arcs φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, ... $\varphi + 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque, ont même sinus et même cosinus, on aura

$$x^m = k\{\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sin(\varphi + 2n\pi)\sqrt{-1}\}$$

et

$$x = k^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right) \pm \sin\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

expression générale de la racine cherchée; en faisant successi-

sivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., on en tire

$$x' = k^{\frac{1}{m}} \left\{ \cos\frac{\phi}{m} \pm \sin\frac{\phi}{m} \sqrt{-1} \right\}$$

$$x'' = k^{\frac{1}{m}} \left\{ \cos\frac{\phi+2\pi}{m} \pm \sin\frac{\phi+2\pi}{m} \sqrt{-1} \right\}$$

$$x''' = k^{\frac{1}{m}} \left\{ \cos\frac{\phi+4\pi}{m} \pm \sin\frac{\phi+4\pi}{m} \sqrt{-1} \right\}$$

Le nombre de ces racines ne peut aller au-delà de m; car en faisant $n=m$, $n=m+1$, on retrouve les racines correspondantes à $n=0$, $n=1$, etc. Si l'on multiplie l'un par l'autre les facteurs simples

$$x - k^{\frac{1}{m}} \left\{ \cos\left(\frac{\phi+2n\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\phi+2n\pi}{m}\right) \sqrt{-1} \right\}$$

$$x - k^{\frac{1}{m}} \left\{ \cos\left(\frac{\phi+2n\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{\phi+2n\pi}{m}\right) \sqrt{-1} \right\}$$

le produit $x^2 - 2k^{\frac{1}{m}} x \cos\left(\frac{\phi+2n\pi}{m}\right) + k^{\frac{2}{m}}$ représentera tous les facteurs du second degré de la proposée.

64. La résolution de l'équation

$$x^{2m} - 2px^m + q = 0$$

renferme la démonstration du théorême de *Moivre*, qui comprend celui de *Cotes* comme cas particulier. En voici l'énoncé : Fig. 3.
Si on partage un arc AG *en un nombre* m *de parties égales*

chacune à AM, et qu'à partir du point M, on divise la circonférence en autant de parties égales que AM est contenu de fois dans AG, et qu'en suite d'un point quelconque O pris sur le diamètre ou sur son prolongement, on mène les lignes OM, O1, O2, etc. à tous les points de division, le produit des quarrés de ces lignes sera égal à

$$x^{2m} - 2x^m \cos \varphi + 1,$$

en nommant φ l'arc AG, x la ligne qui joint le point O et le centre du cercle, et supposant le rayon égal à l'unité.

Soit

$$m = 4,$$

ce qui donnera les quatre lignes OM, $O1$, $O2$, $O3$, on aura

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = (x - CP)^2 + \overline{MP}^2 =$$

$$x^2 - 2x \cos \frac{\varphi}{4} + \cos^2 \frac{\varphi}{4} + \sin^2 \frac{\varphi}{4} = x^2 - 2x \cos \frac{\varphi}{4} + 1$$

$$\overline{O1}^2 = \left\{ x - \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right) + 1$$

$$\overline{O2}^2 = \left\{ x - \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right) + 1$$

$$\overline{O3}^2 = \left\{ x - \cos\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right) + 1.$$

Mais la résolution de l'équation $x^8 - 2x^4 \cos \varphi + 1 = 0$,

donne

$$x^8-2x^4\cos\varphi+1=\left\{x^2-2x\cos\frac{\varphi}{4}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right)+1\right\}$$
$$\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right)+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right)+1\right\}$$

en observant qu'alors $k=1$; d'où l'on conclut

$$\overline{OM}^2\times\overline{O1}^2\times\overline{O2}^2\times\overline{O3}^2=x^8-2x^4\cos\varphi+1.$$

Si $\varphi=\pi$, alors $\cos\varphi=-1$, et l'équation

$$x^8-2x^4\cos\varphi+1=0$$

se change dans la suivante

$$x^8+2x^4+1=0$$

et extrayant la racine quarrée

$$x^4+1=0,$$

Si $\varphi=0$, alors $\cos\varphi=1$ et la proposée devient

$$x^8-2x^4+1=0,$$

ou le quarré de

$$x^4-1=0.$$

On voit donc que le théorême de *Moivre* contient celui de *Cotes*.

65. *Lagrange* a donné du théorême de *Cotes* une démonstration uniquement fondée sur des principes connus à l'époque où ce géomètre écrivait. Il est clair qu'il suffisait de trouver la décomposition en facteurs réels du second degré de

$$x^m\pm1=0,$$

puisque de là suit le théorême de *Cotes*, et que réciproquement du théorême de *Cotes* résulte cette décomposition.

On avait remarqué avant *Cotes* que les cosinus

$$\cos 0x,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \text{etc.},$$

formaient une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-1, +2\cos x$, c'est-à-dire, que pour avoir la valeur d'un terme de cette suite, il faut multiplier le précédent par $2\cos x$ et du produit retrancher l'antépénultième terme. Cette remarque était due au géomètre français *Viete*. En effet, de la formule connue

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

on déduit, en faisant $b=a$,

$$2\cos^2 a = \cos 2a + \cos 0 \text{ d'où } \cos 2a = 2\cos^2 a - \cos 0,$$

ce qui vérifie la proposition à l'égard du troisième terme. Pour l'étendre à un terme quelconque, faisons $a=(m-1)b$, et nous aurons

$$2\cos b\cos(m-1)b = \cos mb + \cos(m-2)b,$$

d'où résulte

$$\cos mb = 2\cos b\cos(m-1)b - \cos(m-2)b,$$

formule dont la composition établit la généralité de la remarque et de laquelle on déduit

$$2\cos y\cos my = \cos(m-1)y + \cos(m+1)y \ldots.(1)$$

Maintenant qu'on pose

$$2\cos y = x + \frac{1}{x},$$

je dis qu'on aura

$$2\cos my = x^m + \frac{1}{x^m} \ldots\ldots (3)$$

En effet, qu'on suppose que deux termes consécutifs

$$2\cos(m-1)y, \text{ et } 2\cos my$$

soient

soient de la forme

$$x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\,;\; x^m + \frac{1}{x^m},$$

on aura par la substitution dans (1)

$$2\cos(m+1)y = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$

$$= x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}.$$

Ainsi, pourvu que les deux premiers termes $2\cos oy$ et $2\cos y$ soient de la forme $x^m + \frac{1}{x^m}$, en faisant $m = o$, et $m = 1$, ce qui est en effet, tous les autres seront nécessairement de la même forme.

Maintenant les deux équations

$$2\cos y = x + \frac{1}{x}\,;\; 2\cos my = x^m + \frac{1}{x^m},$$

donnent ces deux-ci

$$x^2 - 2x\cos y + 1 = o\,;\; x^{2m} - 2x^m \cos my + 1 = o,$$

qui doivent donc avoir lieu en même temps; par conséquent il faut qu'elles aient une racine commune. Soit a cette racine. Comme ces équations demeurent les mêmes en x et en $\frac{1}{x}$, il s'ensuit que $\frac{1}{a}$ sera encore une racine commune aux mêmes équations: mais si dans cette dernière on fait

$$my = \lambda\pi,$$

on la changera en

$$x^{2m} - 2x^m + 1 = o,$$

qui est le quarré de

$$x^m - 1 = 0:$$

La seule différence consiste en ce que chacun des facteurs de celle-ci se trouve doublé dans la précédente. Que dans

$$2\cos y = x + \frac{1}{x},$$

on écrive pour y sa valeur $\frac{\lambda\pi}{m}$, il viendra pour facteur du second degré

$$x^2 - 2x\cos\frac{\lambda\pi}{m} + 1 = 0,$$

et on donnera à λ toutes les valeurs entières qui donneront pour $\cos\frac{\lambda\pi}{m}$ des valeurs différentes. On observera seulement que pour des valeurs de λ qui rendraient

$$x^2 - 2x\cos\frac{\lambda\pi}{m} + 1 = 0,$$

un quarré parfait, on ne doit retenir pour facteur de $x^m - 1$, que l'un des deux facteurs ; leur produit ne pouvant convenir qu'à l'équation

$$x^{2m} - 2x^m + 1 = 0.$$

CHAPITRE XIII.

Du problême de la trisection de l'angle. Résolution trigonométrique des équations des second et troisième degrés.

66. ÉTANT *donné le cosinus d'un angle, trouver le cosinus de son tiers.*

Soient $3m$ l'angle donné, m l'angle cherché : on a d'abord cette propriété trigonométrique

$$\cos 3m = \cos^3 m - \sin^2 m \cos m - 2\sin^2 m \cos m,$$

et faisant

$$\cos 3m = a, \ \cos m = x, \text{ d'où } \sin^2 m = 1 - x^2,$$

on aura à résoudre l'équation du troisième degré

$$a = 4x^3 - 3x, \text{ d'où } x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0.$$

Il s'agit actuellement de faire entendre comment cette question qui ne semblait susceptible que d'une seule solution, a pu donner lieu à une équation du troisième degré.

On sait d'abord que le cosinus a, donné, appartient à un nombre indéfini d'arcs différens, d'abord à un arc plus petit qu'une circonférence, à ce même arc augmenté d'une, de deux, de trois, etc. circonférences. Qu'on prenne le tiers de chacun de ces arcs, on aura autant d'arcs dont le cosinus sera représenté par x. Mais il arrive, ainsi qu'on l'a vu dans le chapitre précédent, que, parmi ces cosinus, trois seulement sont essentiellement différens.

Or l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0,$$

tombe dans le cas irréductible, c'est-à-dire, que ses trois racines se présentent sous forme imaginaire. En effet, la condition

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$$

est satisfaite, puisque le cosinus a étant toujours plus petit que l'unité, on a

$$\frac{1}{64} > \frac{a^2}{64};$$

ce qui est le caractère de l'irréductibilité. On a vu (n° 53) ce que deviennent les racines, lorsque

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4},$$

ce qui arrive, dans le cas de $a = 1$. D'ailleurs, il est facile de voir, *à priori*, que la proposée tombe dans le cas irréductible; car elle ne peut admettre que des racines réelles, et c'est alors seulement que l'irréductibilité a lieu.

Nous nous proposerons donc de ramener toutes les équations du troisième degré, lorsqu'elles tombent dans le cas irréductible, à une forme telle, qu'elles soient comparables à l'équation que fournit le problème de la trisection de l'angle. Mais avant, examinons plus particulièrement cette équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0,$$

et supposons que son dernier terme soit positif, ou qu'on ait

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{a}{4} = 0.$$

Le produit des racines sera donc négatif, et alors ou les trois racines seront négatives, ou il y en aura une négative et deux positives. Mais on apperçoit aisément qu'elles ne peuvent être toutes trois négatives, parce que leur somme est zéro, d'après la composition de l'équation; d'ailleurs, si l'angle donné est plus petit que 100° (nouvelle division), le cosinus de son tiers sera positif; mais le cosinus de ce tiers, augmenté du tiers de la circonférence, sera nécessairement négatif. Si l'angle donné était plus grand que 100°, mais plus petit que 200°, il y aurait un cosinus négatif et un autre positif. Ainsi, lorsque le dernier terme est positif, il y a nécessairement une racine négative, et deux positives. Dans le cas du dernier terme négatif, il faut qu'il y ait une racine

positive et deux négatives, parce qu'autrement les trois racines devraient être positives, ce qui ne peut avoir lieu. Dans le cas où l'angle donné est droit, le dernier terme est zéro. En effet, dans ce cas, les arcs sont $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$; le cosinus de $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$ est zéro, et ceux de $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}$ et de $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$ sont égaux et de différens signes.

Revenons maintenant à la question énoncée plus haut, et prenons pour exemple l'équation

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{12} = 0,$$

équation qu'on peut écrire ainsi qu'il suit :

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = 0,$$

et alors x représente le cosinus du tiers d'un arc donné par son cosinus $\frac{1}{3}$. Ainsi, pour avoir la valeur d'x, il faut chercher le logarithme de $\frac{1}{3}$, en supposant celui de l'unité $= 1$, et l'arc auquel répond ce cosinus : divisant cet arc par 3, on prendra le cosinus du quotient qui sera l'une des racines. On sait trouver les autres.

Supposons l'équation plus générale

$$x^3 - px + q = 0 \ldots\ldots(1)$$

On suppose ici le coefficient p négatif, afin que la proposée puisse tomber dans le cas irréductible : le terme tout connu peut d'ailleurs être positif ou négatif. On fera dans la proposée

$$x = rx,$$

ce qui la changera en

$$r^3x'^3 - prx' + q = 0, \text{ ou } x'^3 - \frac{p}{r^2}x + \frac{q}{r^3} = 0 \ldots(2)$$

Sous cette forme, la précédente devient comparable avec

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0 \ldots\ldots (3)$$

en posant

$$\frac{3}{4} = \frac{p}{r^2} \text{ d'où } r = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}.$$

Faisant cette substitution dans (2), elle devient

$$x'^3 - \frac{3}{4}x' + \frac{q.3\sqrt{3}}{8p\sqrt{p}}.$$

Si donc $\frac{3\sqrt{3}.q}{2p\sqrt{p}}$ est plus petit que l'unité, la précédente rentrera dans le cas de l'équation (3), dans laquelle a est plus petit que l'unité : or cette condition a toujours lieu lorsque l'équation donnée tombe dans le cas irréductible ; car alors on a

$$\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2, \text{ d'où } \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} > \frac{q}{2} \text{ et } \frac{3\sqrt{3}.q}{2p\sqrt{p}} < 1.$$

Cela posé, on peut résoudre cette équation par la méthode dont nous avons fait usage à l'égard de l'équation

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{12}.$$

Dans le cas de

$$\frac{3\sqrt{3}.q}{2p\sqrt{p}} > 1,$$

on aurait un cosinus plus grand que l'unité, et dont conséquemment on ne pourrait assigner l'arc correspondant.

Cherchons maintenant à transformer

$$\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right\}}$$

qui exprime l'une des racines de l'équation du troisième degré (n° 31). On a (n° 63)

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right\}:$$

or a et b étant des quantités réelles, $\sqrt{a^2+b^2}$ sera plus grand que a, ensorte que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sera plus petit que l'unité, ainsi que $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On peut donc supposer que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit le cosinus d'un arc inconnu x, qu'on peut trouver par le moyen des tables, puisque les nombres a et b sont donnés, et, dans cette supposition, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sera le sinus du même arc, comme on s'en convaincra en observant que le quarré du sinus de l'arc $x=1-\cos^2 x=1-\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2}$. Ensorte que

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos x+\sin x\sqrt{-1}),$$

et

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}=\sqrt[6]{a^2+b^2}\,(\cos\tfrac{1}{3}x+\sin\tfrac{1}{3}x\sqrt{-1}).$$

Substituant donc $-\frac{q}{2}$ pour a et $\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}$ pour b, on aura

$$\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right\}}$$

$$=\sqrt[6]{\left(+\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{3}x+\sin\frac{1}{3}x\sqrt{-1}\\+\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{3}x\sqrt{-1}\end{array}\right\},$$

x étant l'arc dont le cosinus $=\frac{-q\sqrt{27}}{2\sqrt{p^3}}=\frac{-q.3\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$. Ainsi la

première racine est

$$x = 2\cos\tfrac{1}{3}x\,.\sqrt{\frac{p}{3}}\,.$$

et la condition que le cosinus soit < 1, est exprimée par

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}.$$

Les deux autres racines se produisent sous forme à-la-fois réelle et finie.

67. Le procédé de résolution par les signes trigonométriques, et les secours qu'offrent les tables, sont tels, qu'on en tire avantage même à l'égard des équations du second degré. Soit donc l'équation

$$x^2 + px \pm q = 0,$$

dans laquelle nous supposerons d'abord q positif : faisant

$$x = z\sqrt{q} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

on aura

$$qz^2 + pz\sqrt{q} + q = 0,\ \text{ou}\ z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}}z + 1 = 0,$$

ou divisant par z

$$z + \frac{1}{z} = -\frac{p}{\sqrt{q}} \ldots\ldots(2)$$

1°. Si $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, on fera

$$z = \cos u + \sin u\sqrt{-1},$$

ensorte que l'équation (2) deviendra

$$\cos u + \sqrt{-1}\sin u + \frac{1}{\cos u + \sqrt{-1}\sin u} = 2\cos u,$$

en multipliant les deux termes de la fraction par......... $\cos u - \sqrt{-1}.\sin u$; on déduit de là

$$\cos u = -\frac{p}{2\sqrt{q}}.$$

Les tables de sinus feront connaître l'angle u, et comme à la même valeur de $\cos u$ répondent les angles $+u$ et $-u$, on aura pour z, et conséquemment pour x, deux valeurs qui seront imaginaires ; ce qui doit arriver, puisqu'on a, dans l'hypothèse actuelle, $q > \frac{p^2}{4}$;

2°. Si le nombre $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, plus grand que l'unité, on fera

$$z = \text{tang}\, u,$$

et on aura

$$z + \frac{1}{z} = \text{tang}\, u + \frac{1}{\text{tang}\, u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cos u} = \frac{2}{\sin 2u} = -\frac{p}{\sqrt{q}},$$

d'où on tire

$$\sin 2u = -\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les tables de sinus donneront le plus petit des angles qui répondent à cette expression de $\sin 2u$, prise positivement : cet angle, pris avec le signe moins, sera la valeur de $2u$; mais à ce sinus répondent les deux arcs $2u$ et $c - 2u$, c étant la demi-circonférence : on aura donc pour les deux valeurs de x,

$$x = \sqrt{q} \times \text{tang}\, u;\ x = \sqrt{q} \times \text{tang}\left(\frac{c}{2} - u\right)$$

racines réelles et négatives.

Dans le cas de q négatif, auquel correspond

$$z - \frac{1}{z} = - \frac{p}{\sqrt{q}},$$

on fera

$$z = \text{tang}\, u,$$

d'où

$$z - \frac{1}{z} = \left(\text{tang}\, u - \frac{1}{\text{tang}\, u}\right) = - \frac{1 - \text{tang}^2 u}{\text{tang}\, u} = - \frac{2}{\text{tang}\, 2u},$$

et conséquemment

$$\text{tang}\, 2u = + \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les tables de sinus feront connaître le plus petit des angles qui répondent à cette expression de tang $2u$; mais à la tangente de $2u$, répondent les deux arcs $2u$ et $c + 2u$; on aura donc

$$x = \sqrt{q} \times \text{tang}\, u;\ x = \sqrt{q} \times \text{tang}\left(\frac{c}{2} + u\right),$$

c'est-à-dire, deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

Pour étendre encore ce procédé à l'équation du troisième degré

$$x^3 \mp px + q = 0,$$

supposons

$$x = r\left(z \pm \frac{1}{z}\right) \ldots (1)$$

r étant une quantité indéterminée, nous aurons

$$x^3 \mp px + q = r^3\left(z^3 \pm \frac{1}{z^3}\right) \pm (3r^3 - pr)\left(z \pm \frac{1}{z}\right) + q = 0;$$

déterminant r au moyen de l'équation

$$3r^3 - pr = 0, \text{ on aura } r = \sqrt{\frac{p}{3}},$$

la valeur de z dépendra d'une réduite du sixième degré résoluble à la manière du second : en effet, il restera

$$r^3\left(z^3 \pm \frac{1}{z^3}\right) + q = 0, \text{ d'où } z^3 \pm \frac{1}{z^3} = -\frac{q}{r^3} = -\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}} = 2h \ (2).$$

Les équations (1) et (2) serviront ensemble à résoudre la proposée. Supposons d'abord que le signe supérieur ait lieu, et que le nombre proposé h soit, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, alors la quantité $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ est négative, et la proposée tombe dans le cas irréductible : que l'on fasse

$$z = \cos u + \sqrt{-1} \sin u,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\cos u \times \sqrt{\frac{p}{3}} \ldots\ldots\ldots (3)$$

et de là, d'après le théorême démontré (nº 54 et 55)

$$(\cos u \pm \sqrt{-1} \sin u)^m = \cos mu \pm \sqrt{-1} \sin mu,$$

on déduit

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos 3u, \text{ partant } \cos 3u = h.$$

Soit A le plus petit des angles dont le cosinus est h, angle qui sera donné par les tables, on aura pour $3u$ les trois valeurs A, $2c + A$, $4c + A$, et par conséquent les trois valeurs de x seront, d'après l'équation (3)

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \tfrac{1}{3} A$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{2c + A}{3}\right)$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{4c + A}{3}\right).$$

En prenant $6c+A$, $8c+A$, etc. pour $3u$, on retomberait sur les racines déjà trouvées, ce qui doit arriver.

On voit clairement ici comment l'imaginaire $\sqrt{-1}$ qui, dans le cas irréductible, s'introduit dans les trois racines, disparaît dans l'expression de $r\left(z+\frac{1}{z}\right)$: la valeur de z exprime le radical imaginaire qui, dans ce cas, entre dans la composition de chacune des racines, et c'est par la comparaison qu'on a faite de ce radical avec $\cos u \pm \sqrt{-1}\sin u$ que les racines ont pris une forme à-la-fois réelle et finie.

Dans le cas de $h=1$, on a $3u=0$, et $u=0$, ensorte que les trois racines deviennent

$$x=2\sqrt{\frac{p}{3}};\ x=-\sqrt{\frac{p}{3}};\ x=-\sqrt{\frac{p}{3}},$$

ou

$$x=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ x=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ x=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

à cause de

$$\frac{q^2}{4}=\frac{p^3}{27},\ \text{d'où}\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}=\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Lorsqu'abstraction faite du signe, le nombre h est plus grand que l'unité, on doit faire

$$z^3=\tang u,\ \text{d'où}\ z^3+\frac{1}{z^3}=\frac{2}{\sin 2u}\ \text{et}\ \sin 2u=\frac{1}{h}:$$

on aura donc l'angle u par les tables de sinus : si l'on fait ensuite

$$z=\sqrt[3]{\tang u}=\tang u',\ \text{on aura}\ x=\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2u'},$$

et les deux racines imaginaires seront

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\alpha\ \text{tang}\ u'+\frac{1}{\alpha\ \text{tang}\ u'}\right\}$$

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\alpha'\ \text{tang}\ u'+\frac{1}{\alpha'\ \text{tang}\ u'}\right\}$$

α et α' étant $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ou les deux dernières racines cubiques de l'unité : réduisant, on trouvera

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{-1\mp\cos 2u'\sqrt{-3}}{\sin 2u'}\right\}.$$

Il reste à considérer le cas où

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left(z-\frac{1}{z}\right):$$

on fera alors

$$\frac{1}{z^3}=\text{tang}\,u,\ \text{d'où}\ -\text{tang}\,u+\frac{1}{\text{tang}\,u}=2h\ \text{et}\ \text{tang}\,2u=\frac{1}{h},$$

on aura donc l'angle u au moyen des tables : soit encore

$$\sqrt[3]{\text{tang}\,u}=\text{tang}\,u',$$

la racine réelle sera

$$x=\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\text{tang}\,2u'};$$

et prenant α tang u' et α' tang u', α et α' ayant mêmes acceptions que ci-dessus, les deux racines imaginaires seront représentées par

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{-\cos 2u'\mp\sqrt{-3}}{\sin 2u'}\right\}.$$

Les racines de l'équation du quatrième degré étant des fonctions très-simples de celles de la réduite (n° 32), on pourra le déterminer facilement par la méthode précédente.

CHAPITRE XIV.

De la résolution des équations littérales.

68. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici ne convient qu'aux équations numériques. Comme on a quelquefois besoin d'avoir, sous une forme générale, les racines d'une équation littérale, nous allons indiquer les moyens d'approcher de ces racines, lorsqu'on ne peut les obtenir exactement.

69. D'abord, si une équation littérale est homogène et ne contient qu'une lettre, a, par exemple, on la résout par l'une ou l'autre des méthodes données dans les chapitres précédens. Soit donc l'équation

$$x^4 + 5a^2x^2 + 7a^3x + 11a^4 = 0$$

dont tous les termes sont de quatre dimensions; on supposera $x = ay$, et, par cette hypothèse, on passera à l'équation numérique

$$y^4 + 5y^2 + 7y + 11y = 0;$$

ayant obtenu les racines de celle-ci, on les multipliera par a pour avoir celles de la proposée.

70. On doit observer que si une équation dans laquelle il ne paraît que deux lettres, n'était pas homogène, elle serait censée contenir trois lettres; c'est qu'alors la troisième serait prise pour l'unité qui est sous-entendue.

71. Soit l'équation homogène

$$x^3 + a^2x + abx - a^3 - b^3 = 0:$$

on pourra appliquer à sa résolution la méthode des coefficiens indéterminés, ensorte que, supposant $b < a$, on pourra poser

$$x = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + \text{etc.}$$

A, B, C, D, etc. étant des coefficiens, fonctions de a et de nombres, qu'il s'agit d'évaluer. On a d'après cette hypothèse

$$x^3 = A^3 + 3A^2B.b + \left.\begin{matrix} 3AB^2 \\ +3A^2C \\ \end{matrix}\right\} b^2 + \left.\begin{matrix} B^3 \\ +3A^2D \\ +6ABC \end{matrix}\right\} b^3 + \begin{matrix}\text{etc.}\\ +\text{etc.}\\ +\text{etc.}\end{matrix}$$

$$+ a^2x^2 = a^2A + a^2Bb + a^2Cb^2 + a^2Db^3 + \text{etc.}$$

$$+ abx = + aAb + aBb^2 + aCb^3 + \text{etc.}$$

$$-2a^3 = -2a^3$$

$$-b^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - b^3$$

et, parce que la somme des premiers membres est nulle, il y a lieu aux égalités

$$A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$$

$$3A^2B + a^2B + aA = 0$$

$$3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB = 0$$

$$B^3 + 3A^2D + 6ABC + a^2D + aC - 1 = 0$$

etc.

La première est satisfaite par la supposition

$$A = a;$$

cette substitution faite dans la seconde, la réduit à

$$3a^2B + a^2B + a^2 = 0, \text{ d'où } B = -\tfrac{1}{4}.$$

Ces valeurs de A et de B portées dans la troisième, donnent

$$C = \frac{1}{64a},$$

on déduit la quatrième

$$D = \frac{131}{512\,a^2}.$$

On trouve donc

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64\,a} + \frac{131\,b^3}{512\,a^2} + \text{etc.}$$

série convergente.

On remarquera qu'on a déterminé le premier coefficient A par la résolution de l'équation

$$A^3 + a^2A - 2a^3 = 0,$$

résolution qui a été facile. Mais si l'équation n'admettait pas de racines commensurables, on obtiendrait A par approximation, en posant d'abord

$$A = aA',$$

hypothèse qui donne pour transformée, après avoir divisé par a^3,

$$A'^3 + A' - 2 = 0,$$

Dans le cas de $b > a$, on supposerait

$$x = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.}$$

et, opérant ainsi qu'on vient de le voir, on trouverait

$$A = b,\ B = -\frac{1}{3};\ C = -\frac{1}{3\,b};\ D = \frac{55}{81\,b^2},\ \text{etc.}$$

d'où résulte

$$x = b - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3b} + \frac{55\,a^3}{81\,b^2} - \text{etc.}$$

série convergente.

72. Les équations qui contiennent plus de trois lettres, peuvent se traiter à-peu-près de la même manière ; mais la difficulté consiste à découvrir ceux des termes de l'équation, qui sont les plus grands et qui déterminent la loi suivant laquelle doit descendre la série. Nous allons résoudre la question par une autre méthode.

Soit l'équation

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - acb^2x^2 - a^6b^2 \\ \qquad\qquad\quad + a^5b^6 \\ \qquad\qquad\quad + cd \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + a^8b^4 \\ \quad + a^7b^5 \\ \quad - 2a^4b^3c \end{array} = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

dont on demande les racines finies, si elles sont commensurables, et en suites infinies, si elles sont incommensurables.

D'abord on supposera $x = a^m$, et si l'on est tombé sur une racine de l'équation, nécessairement après avoir ordonné le résultat par rapport aux puissances successives de la lettre a, les coefficiens de ces puissances seront égaux à zéro ; mais on conçoit que, pour qu'une telle réduction ait lieu, il faut que la puissance m de a soit telle qu'il n'y ait pas dans le résultat de la substitution, un terme unique de plus haut exposant de la lettre a, parce que ce terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, sa destruction serait impossible. Soit d'abord, par rapport à la proposée, $x = a^{10}$; et on aura cette ligne des plus grands exposans de la lettre a

$$a^{30},\ a^{21},\ a^{16},\ a^{8};$$

cette supposition n'est pas admissible, parce que a^{30} est le seul terme de son espèce.

$$\left.\begin{array}{l} x = a^5 \\ x = a^4 \end{array}\right\} \text{donnent} \left\{\begin{array}{l} a^{15},\ a^{11},\ a^{11},\ a^8 \\ a^{12},\ a^9,\ a^{10},\ a^8, \end{array}\right.$$

hypothèses qui doivent être rejetées, parce que les termes a^{15} et a^{12} ne se trouvent pas répétés. Soit enfin $x = a^3$, d'où

résulte, pour la ligne des plus grands exposans,

$$a^9,\ a^7,\ a^9,\ a^8,$$

supposition admissible, puisqu'elle fournit deux termes qui renferment la plus haute puissance de la lettre a, et qu'ainsi les termes de a^9 peuvent se détruire. Ces deux termes sont

$$a^9 - b^2 a^9 :$$

or, si l'on eût supposé

$$x = k a^3,$$

k étant une indéterminée, la condition

$$k^3 a^9 - k b^2 a^9 = 0$$

aurait donné

$$k = \pm b;$$

donc $\pm b a^3$ est le premier terme de deux des racines de l'équation proposée. Soit $x = a^2$, ce qui donne pour la ligne des plus hauts exposans de a,

$$a^6,\ a^5,\ a^8,\ a^8,$$

et faisant, comme dans l'exemple précédent, $x = ka^2$, les deux termes de a^8 seront

$$-kb^2 a^8 + b^4 a^8 = 0, \text{ d'où } k = b^2;$$

donc $a^2 b^2$ est le premier terme d'une troisième racine de l'équation proposée. Toute autre supposition serait à rejeter, ensorte qu'on ne trouverait que trois racines, ce qui doit arriver, puisque la proposée n'est que du troisième degré. Nous verrons bientôt comment on trouverait les termes subséquens des trois séries qui expriment les trois racines.

Soit, en général, l'équation

$$\left.\begin{matrix} a^n \\ + \text{etc} \end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix} a^{n'} \\ + \text{etc} \end{matrix}\right\} x^{m'} + \left.\begin{matrix} a^{n''} \\ + \text{etc} \end{matrix}\right\} x^{m''} + \left.\begin{matrix} a^{n'''} \\ + \text{etc} \end{matrix}\right\} x^{m'''} + \text{etc} = 0$$

la ligne inférieure contenant les termes sous-ordonnés, par rapport à la lettre a : on demande quelle puissance de la lettre a il faut substituer à la place de l'inconnue x pour que deux termes aient la plus haute puissance de la lettre a. Si l'on suppose

$$x = a^e,$$

la proposée deviendra

$$\begin{array}{lll} a^{n+me} + a^{n'+m'e} + a^{n''+m''e} \text{ etc.} = 0. \\ + \text{etc.} \quad + \text{etc.} \quad + \text{etc.} \end{array}$$

Considérons deux exposans quelconques, par exemple, $n+me$ et $n'+m'e$: suivant qu'on aura

$$n+me > \text{ou} = \text{ou} < n'+m'e,$$

on aura aussi

$$e > \text{ou} = \text{ou} < \frac{n'-n}{m-m'}.$$

Soient maintenant $Am=m$, $Am'=m'$, $mn=n$, $m'n'=n'$ et menons une ligne NM qui fasse avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique $=e$: si cette ligne marchant parallèlement à elle-même, jusqu'à rencontrer le point n, laisse le point n' en dessous, alors on aura Fig. 4 et 5.

$$e > \frac{n'-n}{m-m'} \text{ ou } n+me > n'+m'e.$$

Si cette parallèle à MN passant par n, laisse le point n' en dessus, on en conclura

$$e < \frac{n'-n}{m-m'} \text{ d'où } n+me < n'+m'e;$$

Si la parallèle rencontre les points n et n' en même temps, la substitution $x=a^e$ donnera deux termes de plus grands exposans égaux.

Généralisant le procédé, prenons pour abscisses les ex-

posans de x, et pour ordonnées correspondantes, les plus hauts exposans de a dans chaque coefficient des puissances successives de x. Si on veut avoir deux termes qui renferment la
Fig. 6. même plus haute puissance de a, il faudra incliner la ligne passant par n, jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point situé de telle manière qu'elle laisse tous les autres en-deçà, par rapport à l'axe des abscisses : alors la tangente de cette inclinaison sera la puissance cherchée de la lettre a : on obtiendra donc le premier terme d'une des racines, en égalant à zéro les deux termes correspondans de l'équation, et tirant de là la valeur de x en a. Par exemple, dans l'équation (1), on aurait

$$Am = m = 3,\ mn = n = 0,\ Am' = m'n' = 2,\ m'n' = n' = 1,$$
$$Am'' = m'' = 1,\ m''n'' = n'' = 6,\ Am''' = m''' = 0,\ m'''n''' = n''' = 8 :$$

les points n' et n''' doivent rester au-dessous de la ligne mn'', parce que des proportions

$$\left.\begin{array}{l} mm'' : mm' :: m''n'' : y \\ mm'' : mm''' :: m''n'' : z \end{array}\right\} \text{ on déduit } \left\{\begin{array}{l} y = 3 > m'n' \\ z = 9 > m'''n''' ; \end{array}\right.$$

donc il faut égaler à zéro la somme des deux termes qui contiennent a avec les exposans $n = 0$ et $n'' = 6$, ce qui donne

$$x^3 - a^6 b^2 x = 0 \text{ d'où } x = \pm a^3 b$$

comme on l'a trouvé plus haut; d'ailleurs on aurait la tangente trigonométrique

$$e = \frac{n''}{m - m''} = \frac{6}{3 - 1} = 3,\ \text{donc } a^e = a^3.$$

Pour obtenir une autre valeur de e, on inclinera la ligne passant par le point n'', jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point, ensorte que dans cette position, elle n'en laisse aucun au-dessus d'elle, et s'il arrive qu'alors elle passe par trois points, on égalera à zéro la somme des termes correspondans, ce qui donnera les premiers termes d'autres racines, et ainsi de suite à l'égard

de tous les points qui se trouveront sur le périmètre de ce polygone. Dans l'équation proposée, comme le point n''' est le seul à la gauche de n'', on égalera à zéro la somme des deux termes correspondans, ou de ceux dans lesquels la lettre a est affectée des exposans $n''=6$ et $n'''=8$, et qui sont

$$-a^6 b^2 x + a^8 b^4 = 0 \text{ d'où } x = a^2 b^2,$$

ainsi qu'il résulte de la première méthode. On trouverait pour ce cas

$$e' = \tfrac{4}{2} = 2, \text{ d'où } a^{e'} = a^2,$$

substitution déjà connue.

73. Il est aisé maintenant de se rendre raison de la règle suivante, donnée par *Newton*, dans son arithmétique universelle.

Pour résoudre une équation littérale, on mènera, à angle droit, deux lignes AX, AY qu'on partagera en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans les plus hautes puissances de x et de y que nous prendrons ici pour a; puis après avoir coordonné tous les termes de l'équation proposée horizontalement, par rapport aux puissances de x, et verticalement par rapport à celles de y, on placera tous les termes qui sont en tête des colonnes verticales, dans les cases de même x et de même y, et au moyen d'une règle, on trouvera, sur-le-champ, tous les termes des équations partielles, qui fournissent les premiers termes des racines. Faisant une application de ce procédé à l'équation (1), dans laquelle on changera a en y, on trouvera que les lignes qui passent par les cases y^0x^3 et y^6x, y^6x et x^0y^8, laissent tous les autres termes en dessous, et on doit poser Fig. 7.

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - b^2 y^6 x = 0 \\ -b^2 y^6 x + b^4 y^8 = 0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \pm\, b y^3 \\ x = b^2 y^2 \end{array}\right.$$

résultats obtenus précédemment.

Reprenons la formule

$$e=\frac{n'-m}{m-m'},$$

et posons l'équation

$$\begin{array}{ccccccccc} & \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{6}{4} & & \frac{7}{5} \\ ax^5 & +2a^2x^4 & \left.\begin{array}{l}-4a^3\\-3a^2\\ \end{array}\right\} x^3 & & \left.\begin{array}{l}+7a^4\\+2bc^3a\\ \end{array}\right\} x^2 & & \left.\begin{array}{l}-8a^7\\-3bca^2\\ \end{array}\right\} x & & \left.\begin{array}{l}+a^8\\-ba^7\\+ca^5\end{array}\right\} =0\,; \end{array}$$

comparant le premier terme avec chacun des suivans, on formera la suite des valeurs de e, en divisant la différence entre l'exposant de a, dans le second terme comparé, et celui de la même lettre dans le premier terme, par la différence, prise en sens contraire, entre les exposans de x, ce qui donnera la suite des fractions qu'on voit au-dessus de la première ligne horizontale de la proposée (on doit faire abstraction des autres termes qui ne sont que sous-ordonnés). Les plus grandes valeurs de e correspondent donc aux termes $-8a^7x$ et a^8, ce qui veut dire que les extrémités du premier côté du polygone répondront aux termes ax^5 et $-8a^7x$, et que celles du second côté aboutiront aux termes $-8a^7x$ et a^8, ensorte qu'on doit poser les deux équations

$$\left.\begin{array}{r} ax^5-8a^7x=0 \\ -8a^7x+a^8=0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x=a^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{8} \\ x=\frac{a}{8}; \end{array}\right.$$

et comme $\sqrt[4]{8}$ admet quatre valeurs, on aura de cette manière les premiers termes des cinq racines de la proposée.

Nous procéderons à la recherche de quelques termes des racines de l'équation

$$\begin{array}{ccc} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} \\ my^3 & -x^3y & -mx^3=0 \end{array}$$

résolue par rapport à y. En appliquant la règle donnée ci-

dessus, on trouve

$$\left.\begin{array}{r} my^3 - x^3y = o \\ x^3y + mx^3 = o \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.} \\ y = -m + \text{etc.} \end{array}\right.$$

Pour avoir les seconds termes, on supposera

$$y = + m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + z;$$

cette valeur substituée dans la proposée, donne, toutes réductions faites

$$mz^3 + 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z^2 + 2x^3 z - mx^3 = o \ldots\ldots (A)$$

d'où on déduit

$$mz^2 + 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z + 2x^3 = o \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$2x^3 z - mx^3 = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B')$$

(B) donne

$$z = - m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \text{ et } z = - 2m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

valeurs à rejeter, parce que l'une substituée pour z dans y, donneroit zéro, et l'autre rendrait le premier terme de la seconde racine : on tire de (B')

$$z = + \frac{m}{2},$$

second terme de la première racine.

La substitution dans la proposée de

$$y = z - m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

donnerait pour transformée en z

$$mz^3 - 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z^2 + 2x^3 z - mx^3 = o \ldots\ldots (C)$$

et, d'après la règle,

$$m z^2 - 3 m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z + 2 x^3 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (D)$$

$$2 x^3 z - m x^3 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (D')$$

d'où résultent dabord

$$z = + 2 m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}},\quad z = + \tfrac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}},$$

valeurs à rejeter de la seconde racine : on aurait ensuite

$$z = + \frac{m}{2}.$$

On connaît donc déjà les deux seconds termes des deux premières racines. Faisant ensuite dans l'équation donnée

$$y = - m + z;$$

on aura pour transformée

$$m z^3 - 3 \overset{\circ}{m^2} z^2 - \left.\begin{matrix} \overset{\frac{3}{2}}{x^3} \\ + 3 m^3 \end{matrix}\right\} z - \overset{\circ}{m^4} = 0 \;\ldots\ldots\; (E)$$

et appliquant la règle, on trouve

$$\left.\begin{matrix} m z^3 - x^3 z = 0 \\ x^3 z + m^4 = 0 \end{matrix}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{matrix} z = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \text{ valeurs à rejeter.} \\ z = - \dfrac{m^4}{x^3}. \end{matrix}\right.$$

Nous avons donc déjà trouvé

$$y = m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.}$$

$$y = - m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.}$$

$$y = - m - \frac{m^4}{x^3} + \text{etc.}$$

Nous procéderons maintenant à la recherche des troisièmes termes et, à cet effet, nous ferons dans (A)

$$z = \frac{m}{2} + u,$$

ce qui donnera

$$m u^3 + \left. \begin{array}{l} 3 m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{3}{2} m^2 \end{array} \right\} u^2 \left. \begin{array}{l} + 2 x^3 \\ + 3 m^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{1}{4} m^3 \end{array} \right\} u \left. \begin{array}{l} + \frac{3}{4} m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{m^4}{8} \end{array} \right\} = 0;$$

donc, d'après la règle, on aura les équations

$$m u^2 + 3 m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} u + 2x^3 = 0,$$

$$2x^3 u + \frac{3}{4} m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} = 0, \text{ d'où } u = -\frac{3}{8} m^{\frac{5}{2}} x^{-\frac{3}{2}};$$

la première équation devant être rejetée parce qu'elle est la même que (B). Pour trouver le troisième terme de la seconde racine, faisons la même substitution pour z dans l'équation (C) qui donnera

$$m u^3 \left. \begin{array}{l} - 3 m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{3}{2} m^2 \end{array} \right\} u^2 \left. \begin{array}{l} + 2 x^3 \\ - 3 m^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \\ + \frac{1}{4} m^3 \end{array} \right\} u \left. \begin{array}{l} - \frac{3}{4} m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{m^4}{8} \end{array} \right\} = 0$$

de laquelle on tire les deux suivantes

$$m u^2 - 3 m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} u + 2 x^3 = 0$$

$$2 x^3 n - \frac{3}{4} m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} = 0.$$

La première répète l'équation (D) et la seconde donne

$$u = \tfrac{3}{8}\, m^{\frac{5}{2}}\, x^{-\frac{3}{2}}.$$

Passons enfin à la recherche du troisième terme de la troisième racine, et pour le trouver, faisons dans (E)

$$z = u - \frac{m^4}{x^3},$$

on parviendra aux deux équations

$$\left.\begin{array}{r} m\,u^2 - x^3 = 0 \\ x^3 u + 3m^7 x^{-3} = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} u = m^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{3}{2}} \text{ valeur déjà trouvée,} \\ u = -\dfrac{3m^7}{x^6}; \end{array}\right.$$

Ensorte qu'on aura

$$y = m^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} - \tfrac{3}{8}\, m^{\frac{5}{2}}\, x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.},$$

$$y = -m^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \tfrac{3}{8}\, m^{\frac{5}{2}}\, x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.},$$

$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} - \frac{3m^7}{x^6} - \text{etc.}$$

En continuant de cette manière, on trouvera, sans peine, autant qu'on voudra de termes suivans. On remarquera que les équations qui fournissent les valeurs de z, u, etc. doivent toujours être du premier degré; car, autrement, elles donneraient plus de racines que n'en comporte la proposée.

CHAPITRE XV.

Développemens en séries des quantités exponentielle et logarithmique.

74. SOIT l'exponentielle a^x à développer en une série procédant suivant les puissances de x; j'écris a sous la forme d'un binome $1+(a-1)$, ensorte que

$$a^x=\{1+(a-1)\}^x,$$

d'où

$$\{1+(a-1)\}^x=1+x(a-1)+\frac{x(x-1)}{1.2}(a-1)^2+\frac{x.(x-1)(x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+\text{etc.}$$

et ordonnant par rapport à x

$$a^x=1+x\left\{(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{etc.}\right\}+x^2\{\quad\}+x^3\{\quad\}+\text{etc}\ldots\ (B),$$

d'où l'on voit que l'exponentielle a^x peut très-légitimement être supposée égale à une série procédant suivant les puissances de x.

Soit donc

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.}$$

Pour évaluer les indéterminées A, B, C, D, etc. on partira de cette propriété dont jouit l'exponentielle a^x de donner des résultats identiques en faisant $x=2x$, ou bien en élevant de part et d'autre au quarré : dans le premier cas on a

$$a^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+32Ex^5+\text{etc.};$$

et dans le second

$$a^{2x}=1+2Ax+\left.\begin{matrix}+2B\\+A^2\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+2C\\+2AB\end{matrix}\right\}x^3\left.\begin{matrix}+2D\\+2AC\\+B^2\end{matrix}\right\}x^4\left.\begin{matrix}+2E\\+2AD\\+2BC\end{matrix}\right\}x^5+\text{etc.}$$

Egalant les coefficiens des mêmes puissances de x dans les deux membres de l'identité précédente, on trouvera

$$B=\frac{1}{2}A^2$$

$$C=\frac{1}{2.3}A^3$$

$$D=\frac{1}{2.3.4}A^4$$

$$E=\frac{1}{2.3.4.5}A^5\ ;$$

etc.

donc

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2.3}+\frac{A^4x^4}{2.3.4}+\frac{A^5x^5}{2.3.4.5}+\text{etc}\ldots(C)$$

A étant le coefficient de x, on a d'après la série (B)

$$A=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{etc.}\ \ldots\ldots(D)$$

et de l'hypothèse de $x=1$ dans (C), résulte

$$a=1+A+\frac{A^2}{1.2}+\frac{A^3}{1.2.3}+\frac{A^4}{1.2.3.4}+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc}\ldots(E)$$

Les séries (D) et (E) démontrent qu'il existe entre *la base a* et le nombre A une telle relation, que l'un de ces nombres étant donné, on peut toujours trouver l'autre.

Soit e la valeur numérique particulière de a lorsque $A=1$, on aura d'après (E)

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{etc} \ldots (F)$$

et d'après (*C*)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc} \ldots\ldots (G)$$

Ce nombre e n'est autre chose que le nombre $B+1$ trouvé (1re section n° 84). En évaluant la série (*F*), on trouve

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874 \text{ etc.}$$

Si dans la série (*G*) on fait $x = A$, on obtiendra la suivante

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^5}{2.3.4.5} + \text{etc.} \ldots (H)$$

laquelle n'est autre chose que la série (*E*).

On a donc, d'après les séries (*E*) et (*K*), entre la base quelconque a, la base particulière e et le nombre A, cette relation

$$e^A = a, \text{ d'où } a^{\frac{1}{A}} = e.$$

Si l'on prend de part et d'autre les logarithmes pour la base a, on aura

$$\frac{1}{A} = \log. e, \text{ d'où } A = \frac{1}{\log. e}.$$

Si ces logarithmes appartiennent au système dont la base est e, employant alors une autre caractéristique l pour les représenter, on écrira

$$\frac{1}{A} la = 1, \text{ d'où } A = la,$$

parce que le logarithme de la base est toujours l'unité (1re sect.

n° 195). On se rappellera donc que la est le logarithme de la base a, rapporté au système des logarithmes de *Neper*, qu'on nomme communément logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*. Lorsque a devient e, on a

$$A = 1.$$

Faisons $a = 1 + b$, et mettons pour A sa valeur dans

$$A = l.a$$

il viendra

$$l(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$$

A l'effet de rendre cette série convergente, et par conséquent propre à l'évaluation numérique des logarithmes, nous y changerons b en $-b$, d'où résultera

$$l(1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$$

et retranchant le second développement du premier, il viendra

$$l\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 2\left\{b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \text{etc.}\right\}.$$

Posant

$$\frac{1+b}{1-b} = 1 + \frac{u}{n}, \text{ d'où } b = \frac{u}{2n+u};$$

et substituant dans la précédente, on obtiendra

$$l\left(1 + \frac{u}{n}\right) = 2\left\{\frac{u}{2n+u} + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^5 + \text{etc.}\right\};$$

mais réduisant $1 + \frac{u}{n}$ au dénominateur n, on a

$$l.\left(1 + \frac{u}{n}\right) = l\left(\frac{n+u}{n}\right) = l(n+u) - l.n;$$

donc faisant $u = 1$, on aura

$$l(n+1)=ln+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\text{etc.}\right\}$$

série d'autant plus convergente que le nombre n sera plus grand; les logarithmes qu'on en déduira seront rapportés à la base e. Si dans la série précédente on fait $n=4$, puis $n=1$, on calculera

$$l.\,5=l.\,4+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,(9)^3}+\frac{1}{5\,(9)^5}+\text{etc.}\right\}$$

$$l.\,2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,(3)^3}+\frac{1}{5\,(3)^5}+\text{etc.}\right\}$$

desquels on déduira

$$l.\,10=2,30258\ 50929\ 94045\ 68402,\ \text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{l.10}=0,\ 43429\ 44819\ 03251\ 82765,\ \text{etc.}$$

Nous avions trouvé (1re sect. n° 211) la relation $a^x=e^{x'}$: si l'on prend de part et d'autre les logarithmes pour la base e, on a la relation

$$x l.a=x',\ \text{d'où}\ \log.\,n=\frac{l.\,n}{l.\,a}$$

log et *l* désignant les logarithmes d'un même nombre, rapportés aux bases a et e. Dans le cas de $a=10$, le facteur $\frac{1}{l.a}$ est celui que nous avons calculé plus haut. Si donc on introduit le *module* $\frac{1}{l.a}$ dans les séries trouvées précédemment, on aura pour la base a

$$\log.(n+1)=\log.n+\frac{2}{l.a}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\text{etc.}\right\}$$

Le développement

$$l.\,(1+b)=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.},$$

en y introduisant le module

$$\frac{1}{l.a} = \frac{1}{A},$$

et supposant

$$1 + b = y, \text{ d'où } b = y - 1$$

devient

$$log.\ y = \frac{(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3}{A} + \text{etc.}$$

Mais cette formule n'est convergénte que lorsque le nombre y dont elle donne le logarithme, est peu différent de l'unité : aussi n'est-elle d'aucune utilité pour le calcul des logarithmes ordinaires. Le moyen suivant donné par *Lagrange* (tome X des Écoles Normales), est propre à la rendre convergente pour tous les nombres.

Puisque

$$\log \sqrt[r]{y} = \frac{1}{r} \log y,$$

on aura par cette substitution dans la série précédente

$$\log y = \frac{r}{A}\left[(\sqrt[r]{y}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{y}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{y}-1)^3 - \text{etc.}\right]$$

ou l'on peut prendre pour r un nombre quelconque positif ou négatif. Quel que soit le nombre y, on peut toujours en prendre une racine d'un degré r tel que $\sqrt[r]{y}$ soit un nombre aussi peu différent de l'unité que l'on voudra : ainsi la formule précédente donnera toujours la valeur de log y avec toute l'exactitude qu'on pourra desirer. Si l'on prend r négativement, alors $\sqrt[r]{y}$ devient $\frac{1}{\sqrt[r]{y}}$, et la série qui exprime log y devient, en changeant les signes,

log

$$\log y = \frac{r}{A}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

Le nombre y étant plus grand que l'unité, $\sqrt[r]{y}$ sera plus grande que l'unité, et conséquemment on aura les deux inégalités

$$\sqrt[r]{y}-1>0 \text{ et } 1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}>0,$$

et y étant moindre que l'unité,

$$\sqrt[r]{y}-1<0 \text{ et } 1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}<0.$$

Mais les différences seront d'autant plus petites que l'exposant r de la racine sera plus grand. Si le nombre a est la base des logarithmes, on pourra par les mêmes formules déterminer aussi exactement qu'on voudra, la valeur du *module* $\frac{1}{A}$; car en faisant $y=a$ et $\log a=1$, on aura

$$A=r[(\sqrt[r]{a}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{a}-1)^3-\text{etc.}]$$

ou bien

$$A=r\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

Il est clair que les deux séries qui donnent $\log y$, seront nécessairement convergentes, quand on extraira de y une racine r telle que $\sqrt[r]{y}-1$ soit une fraction plus petite que l'unité; car alors $1-\frac{1}{\sqrt{y}}$ sera une fraction plus petite encore, $\sqrt{y}$

étant à très-peu-près l'unité, puisqu'on a

$$1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}} = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{y}} :$$

dans ce cas, la première série donnera

$$\log y < \frac{r}{A}\left(\sqrt[r]{y} - 1\right)$$

et de la seconde on déduira

$$\log y > \frac{r}{A}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right).$$

Ainsi on a deux limites pour la valeur de log y, qu'on peut resserrer autant qu'on le veut, en prenant r toujours plus grand; ensorte que dans le cas de r infiniment grand, il est permis de regarder l'une et l'autre des formules précédentes comme l'exacte valeur de log y.

C'est sous cet aspect qu'on peut dire qu'à un nombre donné répond toujours une infinité de logarithmes, puisque sa racine infinitienne a nécessairement une infinité de valeurs différentes (Chap. XII).

Supposons donc que l'indice r soit pris tel que la racine r de y ne contienne que l'unité avant la virgule, et qu'après la virgule, il se trouve s zéros; alors, si l'on s'arrête à $2s$ décimales, le terme $(y^r - 1)^2$, et, à fortiori, les suivans ne donnent rien, de sorte qu'on a dans ce cas

$$\log y = \frac{r}{A}\left(\sqrt[r]{y} - 1\right) \quad \text{et} \quad A = r\left(\sqrt[r]{a} - 1\right).$$

Ainsi, prenant $r = 2^{63}$, on trouve, pour $a = 10$,

$\sqrt[r]{a}=1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ldots$

$\frac{1}{r}=0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354\ldots$

de sorte que l'on aura

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{r}\times\frac{1}{\sqrt[r]{a}-1}=\frac{86736173798840354}{199717420812550527}$$
$$=0,\ 43429\ 44819\ 03251\ldots$$

Si l'on veut avoir le logarithme de 3, on fera $y=3$ et employant de même soixante extractions de racines quarrées, on trouvera

$\sqrt[r]{y}=1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932$, etc.

et de-là

$$\log y=\frac{\sqrt[r]{y}-1}{\sqrt[r]{a}-1}=\frac{95289426407458932\ldots}{199717420812550527\ldots}$$
$$=0,\ 47712\ 12547\ 19662\ldots$$

Cette méthode est, comme l'on voit, très-laborieuse par le grand nombre d'extractions de racines qu'elle exige : mais les séries que nous avons données ci-dessus servent à la simplifier et à la compléter ; car, quel que soit le nombre y, il suffira d'en extraire quelques racines quarrées, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre $\sqrt[r]{y}$ qui n'ait que l'unité avant la virgule ; alors les puissances de $\sqrt[r]{y}-1$ seront des fractions d'autant plus petites qu'elles seront plus hautes : par conséquent il suffira toujours de prendre un certain nombre de termes de la série pour avoir les logarithmes exacts jusqu'à tel nombre de décimales qu'on voudra.

75. Cette méthode très-simple, est celle qui fait trouver de la manière la plus abrégée le logarithme d'un nombre quelconque que l'on cherche isolément. Mais dans le travail de la construction des tables, où un logarithme déjà trouvé peut servir à trouver les logarithmes suivans, la première équation transformée par des substitutions, donne des séries plus faciles à calculer.

Soit d'abord

$$y-1=\frac{2}{n^3-3n};$$

mettant cette valeur dans le développement de $\log y$, on aura

$$\log\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}=$$

$$\frac{1}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3-\text{etc.}\right\}$$

Soit ensuite

$$y-1=-\frac{2}{n^3-3n}:$$

on aura

$$\log\frac{n^3-3n-2}{n^3-3n}=$$

$$\frac{1}{la}\left\{-\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3-\text{etc.}\right\}$$

et soustrayant la seconde équation de la première,

$$\log\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}-\log\frac{n^3-3n-2}{n^3-3n}=\log\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}$$

$$=\frac{2}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5+\text{etc.}\right\}.$$

Mais on trouve que

$$\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=\frac{(n-1)^2\,(n+2)}{(n+1)^2\,(n-2)}:$$

donc

$$\log\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=2\log(n-1)+\log(n+2)$$
$$-2\log(n+1)-\log(n-2);$$

reportant cette décomposition dans la formule précédente, on aura

$$\log(n+2)=\log(n-2)+2\log(n+1)-2\log(n-1)$$
$$+\frac{2}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5+\text{etc.}\right\}.$$

Pour calculer les logarithmes au moyen de cette formule, on donnera successivement à n les trois valeurs 3, 4 et 5; on aura donc trois équations qui contiendront log 2, log 3 et log 5, et les combinant convenablement, on trouvera

$$\log 2=\frac{1}{la}\left[5\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+4\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-3\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{3.161^3}+\frac{1}{5.161^5}+\text{etc.}\right)\right]$$
$$\log 3=\frac{1}{la}\left[8\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+6\left(\frac{1}{26}+\frac{2}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-4\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{3.161^3}+\frac{1}{3.161^5}+\text{etc.}\right)\right]$$
$$\log 5=\frac{1}{la}\left[12\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+8\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-6\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{3.161^3}+\frac{1}{5.161^5}+\text{etc.}\right)\right].$$

Ensuite cherchant les logarithmes des autres nombres premiers, on aura

$$\log 7 = \log 3 + 2 \log 6 - 2 \log 4$$
$$+ \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{55} + \frac{1}{3.55^3} + \frac{1}{5.55^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 11 = \log 7 + 2 \log 10 - 2 \log 8$$
$$+ \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{351} + \frac{1}{3.351^3} + \frac{1}{5.351^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 13 = \log 9 + 2 \log 12 - 2 \log 10$$
$$+ \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{649} + \frac{1}{3.649^3} + \frac{1}{5.649^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 17 = \log 13 + 2 \log 16 - 2 \log 14$$
$$+ \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{1665} + \frac{1}{3.1665^3} + \frac{1}{5.1665^5} + \text{etc.}\right).$$

D'où l'on voit que chaque logarithme est donné par une série très-convergente et par trois autres logarithmes connus : en effet, au moyen des logarithmes de 2, 3 et 5, on trouve, par de simples additions, ceux des autres nombres jusqu'à 7, ceux des nombres entre 7 et 11, entre 11 et 13 : on aura donc ainsi les logarithmes des nombres premiers et par conséquent ceux de tous les autres nombres.

Si dans la formule

$$\log(1+b) = \frac{1}{l.a}\left\{ b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.} \right\}$$

on fait successivement

$$b = \frac{1}{n} \text{ et } b = -\frac{1}{n},$$

on trouvera

$$\log(n+1) = \log n + \frac{1}{l.a}\left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{3}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \text{etc.} \right\},$$

Digitized by Google

$$\log(n-1) = \log n - \frac{1}{l.a}\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \text{etc.}\right\}.$$

Supposons successivement $n=10, =100, =1000, =10000$, etc. nous aurons les logarithmes des nombres 9, 11, 99, 101, 999, 1001, 9999, 10001 etc.

De ces premiers logarithmes, on déduira sans peine ceux de leurs multiples et de leurs rapports mutuels : on aura, par exemple,

$$\log 3 = \tfrac{1}{2}\log 9 = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2\,l.a}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{40000} + \text{etc.}\right)$$

Nous terminerons ce qui concerne cette théorie, par l'exposition de quelques formules remarquables en ce quelles donnent par un petit nombre de termes, les logarithmes des nombres au-dessus de 1000, avec toute l'approximation desirable.

A cet effet, nous reprendrons la série

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 2M\left\{b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \text{etc.}\right\}$$

dans laquelle M représente le module $\frac{1}{l\,a}$: si l'on suppose

$$\frac{1+b}{1-b} = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{1}{2x^2-1};$$

cette série devient

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = \log\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) =$$

$$2M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5(2x^2-1)^5} + \text{etc.}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\log x = \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + M\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.}\right\}$$

série très-convergente, au moyen de laquelle on résoudra facilement la question suivante :

Étant donnés les logarithmes des nombres premiers au-dessous de 1000, *avec* 15 *décimales, trouver les logarithmes des premiers nombres au-dessus de* 1000 *avec* 12 *décimales au moins.*

Lorsque x est un peu plus grand que 1000, le terme $\frac{1}{3(2x^2-1)^3}$ équivaut à peine à

$$\frac{1}{24000\ 00000\ 00000\ 00000};$$

on peut donc le négliger, et on aura

$$\log x = \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + M\left(\frac{1}{2x^2-1}\right).$$

Si au lieu de $M\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ on prenait $M\left(\frac{1}{2x^2-2}\right)$, l'erreur serait exprimée par la différence

$$M\left(\frac{1}{(2x^2-1)(2x^2-2)}\right);$$

donc, dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire, lorsque x excède 1000 de très-peu d'unités, cette erreur serait d'environ

$$\frac{0,43429\ldots}{400\ 00000\ 00000} = 0,\ 00000\ 00000\ 001:$$

ainsi, pour avoir 12 à 13 décimales exactes, il suffit de recourir à la formule

$$\log x = \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + M\left(\frac{1}{2x^2-2}\right)$$
$$= \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}M}{(x+1)(x-1)}\right)\ldots(1);$$

mais x étant un nombre premier, les facteurs $x+1$ et $x-1$ seront des nombres pairs et se décomposeront toujours en facteurs plus petits que x; on pourra donc trouver leurs logarithmes avec 13 décimales, et on aura déjà

$$\frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2}.$$

A l'égard du terme $\frac{\frac{1}{2}M}{(x+1)(x-1)}$, on peut en calculer la valeur numérique par les tables de logarithmes ordinaires, en prenant le logarithme du module M avec 7 décimales seulement, et retranchant de ce logarithme celui de 2, le reste sera un logarithme constant, dont on soustraira celui du dénominateur qu'on a déjà. Or, d'après ce qui a été dit sur les caractéristiques négatives, (1[ère] sect. n° 209)

$$\log M = \bar{1},63778\ 43$$
$$\log \tfrac{1}{2}M = \bar{1},33675\ 43;$$

donc

$$\log\left\{\frac{\frac{1}{2}M}{(x+1)(x-1)}\right\} = \bar{1},33675\ 43 - [\log(x+1)+\log(x-1)].$$

Soit, pour application $x=1097$ dont on cherche le logarithme avec 12 décimales : on a

$$x+1 = 1098 = 18 \times 61$$
$$x-1 = 1096 = 8 \times 137:$$

on trouve dans les tables de *Hutton*, ou dans celles de *Callet*, sous le titre *Tables de log. vulgaires et de log. hyperboliques, à 20 décimales*, etc.

$$\begin{array}{rl}
\log\ 18 & = 1{,}25527\ 25051\ 033 \\
\log\ 61 & = 1{,}78532\ 98350\ 108 \\
\hline
\text{Somme} & = 3{,}04060\ 23401\ 141 \\
\log\ 8 & = 0{,}90308\ 99869\ 919 \\
\log 137 & = 2{,}13672\ 05671\ 564 \\
\hline
\text{Somme} & = 6{,}08041\ 28942\ 624 \\
\frac{1}{2}\ \text{somme} & = 3{,}04020\ 64471\ 312 = \dfrac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} \\
\log \frac{1}{2} M & = \bar{1},33675\ 43 \\
\log(x+1)+\log(x-1) & = 6{,}08041\ 29 \\
\hline
\log \frac{1}{2} M - [\log(x+1)+\log(x-1)] & = \bar{7},25634\ 14 = \log 0{,}00000\ 01804\ 433 \\
\hline
 & \ 0{,}00000\ 01804\ 433 \\
\dfrac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} & = 3{,}04020\ 64471\ 312 \\
\hline
\text{Somme} & = 3{,}04020\ 66275\ 745 = \log x = \log 1097.
\end{array}$$

Ce logarithme ne diffère de celui de *Hutton* ou de *Callet*, que de deux unités dans la 13eme décimale.

Nous ferons connaître une formule propre à donner avec 15 ou 16 décimales le logarithme d'un très-grand nombre, pourvu qu'on ait des tables de logarithmes des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 1000, calculées avec 16 décimales.

A cet effet, on fera une fraction ayant pour numérateur les six ou sept premiers chiffres du nombre donné, et pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y aura de chiffres au numérateur; puis réduisant cette fraction en fraction continue, par le procédé donné (n° 9), on cherchera celle des fractions intégrantes qui, sous des termes plus petits que 1000, approchera le plus de la fraction donnée. Soit $\frac{q}{p}$ cette fraction qui peut être plus grande ou plus petite que le nombre donné (n° 11) : nous la supposerons plus petite, et désignant par a le nombre donné, on posera l'équation

$$a = \frac{q(1+x)}{p(1-x)},$$

$\frac{1+x}{1-x}$ étant un nombre très-peu au-dessus de l'unité : on déduit de là

$$\log a = \log q - \log p + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \log q - \log p + 2M\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right\};$$

mais la fraction

$$x = \frac{ap-q}{ap+q}$$

étant très-petite, ses puissances 3e, 4e, 5e, etc. peurront être négligées dans l'emploi numérique de la formule ; ensorte qu'elle se réduira

$$\log a = \log q - \log p + 2M\left(\frac{ap-q}{ap+q}\right)\ldots.(2).$$

Faisons une application de ce moyen à la recherche de

$$\log \sin 0^Q,556;$$

Q désignant le quart de la circonférence : on a

$$\sin 0^Q,556 = 0,\ 76649\ 30068\ 09349\ 8 = a;$$

après avoir formé la fraction $\frac{766493}{1000000}$, on opérera sur les deux termes comme pour en chercher le plus grand commun diviseur, et on trouvera la suite des quotiens 1, 3, 3, 1, 1, 5, 1, 4 qui donneront les fractions convergentes

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{10}{13},\ \frac{13}{17},\ \frac{23}{30},\ \frac{128}{167},\ \frac{151}{197},\ \frac{732}{955},$$

ensorte qu'on peut prendre la dernière pour une approximation du sinus proposé. On aura donc

$$\frac{q}{p} = \frac{732}{955}.$$

Au moyen de ces données, on trouvera

$$\frac{ap - q}{ap + q} = 0{,}00000\ 05611\ 05665\ 7 :$$

le cube de ce nombre aurait 18 zéros après la virgule, et conséquemment on peut le négliger

$$2M = 0{,}86858\ 89638\ 06503\ 65530$$

$$2M.\frac{ap - q}{ap + q} = 0{,}00000\ 04873\ 96159\ 5$$

$$\log q = \log 732 = 2{,}86451\ 10810\ 58391\ 9$$

$$\text{compl.} \log (p = 955) = 7{,}01999\ 66284\ 16252\ 7$$

$$\tfrac{1}{2} \log \sin 0^{Q},556 = 9{,}88450\ 81968\ 70805\ 1.$$

La formule (2) donnerait encore le moyen de résoudre le problême inverse, c'est-à-dire, de trouver avec 15 chiffres le nombre qui répond à un logarithme composé d'un très-grand nombre de chiffres.

76. Nous passerons à l'exposition d'une formule remarquable, en ce qu'elle donne par son premier terme, les logarithmes des nombres au-dessus de 1000 avec dix décimales exactes, lorsqu'on a d'ailleurs ceux des nombres précédens avec la même approximation. Pour cela nous reprendrons la série

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = \frac{2}{l.a}\left\{b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \text{etc.}\right\}$$

si on fait

$$\frac{1+b}{1-b} = n \text{ d'où } b = \frac{n-1}{n+1},$$

on obtiendra la suivante

$$\log n = \frac{2}{l.a}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5+\text{etc.}\right]$$

et posant $n=\frac{p}{q}$, ce qui donne

$$n-1=\frac{p-q}{q} \text{ et } n+1=\frac{p+q}{q},$$

on aura

$$\log\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{2}{l.a}\left\{\frac{p-q}{p+q}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\text{etc.}\right\}$$

Supposons

$$p=x^4-25x^2=x^2(x^2-25)=x^2(x+5)(x-5)$$
$$q=x^4-25x^2+144=(x^2-9)(x^2-16)$$
$$=(x+3)(x-3)(x+4)(x-4),$$

la substitution donnera

$$2\log x+\log(x+5)+\log(x-5)-\log(x+3)$$
$$-\log(x-3)-\log(x+4)-\log(x-4)$$
$$=-\frac{2}{l.a}\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\text{etc.}\right];$$

d'où on déduira

$$\log(x+5)=\log(x+3)+\log(x-3)+\log(x+4)$$
$$+\log(x-4)-\log(x-5)-2\log x$$
$$-\frac{2}{la}\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

Pour se faire une idée de l'approximation de cette formule, on fera $x=1000$: substituant cette valeur dans le premier terme de la série précédente, il sera, à très-peu-près,

0,00000 00000 72....

et multipliant par le double du module, ou par $\frac{2}{la}$, on aura environ 0, 00000 00000 62.... Si on évalue le second terme, on trouvera, après la multiplication faite par $\frac{2}{la}$

0, 00000 00000 00000 00000 00000 00000 11, etc.

Donc au moyen des tables qui donneraient les logarithmes des 1004 premiers nombres avec trente décimales, il suffirait du premier terme de cette série pour obtenir ceux des nombres suivans avec la même approximation. La formule précédente est due au citoyen *Haros, auteur d'une instruction abrégée sur les nouvelles mesures, avec des tables de rapports et de réduction.*

77. Reprenons la série

$$\log n = 2M\left\{\left(\frac{n-1}{n+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

ou M représente $\frac{1}{la}$. Sa convergence diminue à mesure que n augmente, et l'on voit que la limite du décroissement des termes de cette série se trouve dans la suivante

$$2M\{1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}\}$$

parce que le rapport $\frac{n-n}{n+1}$ s'approche de l'unité en même temps que le nombre n devient plus grand. Cette limite répond à l'accroissement indéfini de n, et alors le logarithme qui augmente en même temps que le nombre auquel il appartient, sera lui-même infini. Ainsi la série précédente n'est pas convergente, quoique ses termes aillent en décroissant. C'est une remarque que nous avons annoncée (1re sect. n° 97)

et qui s'étendait à la série suivante $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ etc. qui doit son origine à l'hypothèse de $b=1$ dans le développement.

$$\log(1-b)=-M\left\{b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{b^4}{4}+\text{etc.}\right\}$$

trouvée précédemment. On a, dans ce cas,

$$\log 0=-M\{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\text{etc.}\}.$$

Pour savoir ce qu'est log o, nous supposerons

$$b=1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z},$$

donc

$$\log\left(\frac{1}{z}\right)=-M\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{z-1}{z}\right)^4+\text{etc.}\right\}.$$

Mais d'ailleurs

$$\log\left(\frac{1}{z}\right)=\log 1-\log z=0=-\log z:$$

or cette expression est susceptible d'augmenter indéfiniment dans le sens négatif; car plus le nombre z sera grand, plus $\log z$ le deviendra, mais aussi plus la fraction $\frac{1}{z}$ deviendra petite et sera près de s'anéantir, plus $\frac{z-1}{z}$ approchera de se confondre avec l'unité. C'est dans ce sens qu'il faut entendre cette expression reçue que *le logarithme de zéro est l'infini négatif*. Alors la série $-M\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}\}$ est le développement d'une fonction infinie.

78. On peut parvenir immédiatement au développement de $\log(1+x)$ au moyen de l'analyse suivante, qui a quelqu'analogie avec celle qui nous a servi (1ère sect. Chap. XVIII) à trouver les développemens du binome, de l'infinitome, etc.

Nous supposerons, à cet effet,

$$\log(1+x)=M\{x+Ax^2+Bx^3+\text{etc.}\}$$

A, B, C etc. étant des coefficiens indéterminés, et M un nombre qui fixe le système des logarithmes. Conséquemment

$$\log(1+y)=M\{y+Ay^2+By^3+\text{etc.}\},$$

en observant que pour $x=0$, $\log(1+x)=0$. Retranchant le second développement du premier, on trouve

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=M(x-y)\{1+A(x+y)+B(x^2+xy+y^2)$$
$$+C(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\text{etc.}\}.$$

Pour trouver un autre développement de $\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ soit

$$\frac{1+x}{1+y}=1+z;\ \text{d'où}\ z=\frac{x-y}{1+y},$$

on aura, d'après le développement hypothétique,

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=\log(1+z)=M\{z+Az^2+Bz^3+\text{etc.}\}$$

ou

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=M\left\{\left(\frac{x-y}{1+y}\right)+A\frac{(x-y)^2}{(1+y)^2}+B\frac{(x-y)^3}{(1+y)^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$=M(x-y)\left\{\frac{1}{1+y}+A\frac{x-y}{(1+y)^2}+B\frac{(x-y)^2}{(1+y)^3}+\text{etc.}\right\}$$

La comparaison des deux développemens de $\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ donne, après la division par $M(x-y)$ et l'hypothèse $x=y$,

$$1+2Ax+3Bx^2+4Cx^3+\text{etc.}=1-x+x^2-x^3+\text{etc.}$$

d'où

d'où résultent les égalités

$$\left.\begin{array}{l} 2A = -1 \\ 3B = +1 \\ 4C = -1 \\ 5D = +1 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = +\frac{1}{3} \\ C = -\frac{1}{4} \\ D = +\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

etc. etc.

conséquemment

$$\log(1+x) = M\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}\right\}$$

développement trouvé plus haut.

79. Nous nous proposons de faire voir comment au moyen des séries logarithmiques et exponentielles, on peut résoudre ces quatre questions :

1°. *Trouver un nombre qui, élevé à une puissance désignée par lui-même, soit égal à un nombre proposé.*

La traduction de cette question est

$$x^x = a$$

a étant le nombre donné. Il est facile de trouver pour a un nombre qui ne diffère pas d'une unité du nombre cherché nous supposerons, en appelant p ce nombre, que

$$x = p + z;$$

on aura donc

$$(p+z)^{p+z} = a, \text{ d'où } (p+z)\log(p+z) = \log a.$$

Mais

$$\log(p+z) = \log p + \log\left(1+\frac{z}{p}\right) = \log p + M\left(\frac{z}{p} - \frac{z^2}{2p^2} + \text{etc.}\right)$$

Donc

$$\log a = (p+z)\log(p+z) = p\log p + z\log p + Mz$$ en

négligeant tous les termes au z, passé le premier degré. On déduit de là

$$z = \frac{\log a - p\log p}{\log p + M} \dots\dots (1)$$

Appliquons cette formule au cas de $a = 2000$; on a d'abord, à moins d'une unité près,

$$p = 4{,}8,$$

on aura

$$z = \frac{\log 2000 - 4{,}8\log 4{,}8}{\log 4{,}8 + 0{,}4342945}.$$

Mais

$$\log 2000 = 3{,}3010300,\ \log 4{,}8 = 0{,}68124124,$$
$$4{,}8\log 4{,}8 = 3{,}2699579\ ;$$

donc

$$z = \frac{0{,}0310721}{1{,}1155357} = 0{,}0278\ ;$$

conséquemment

$$x = p + z = 4{,}8278.$$

Si l'on desirait une plus grande approximation, on supposerait, dans (1)

$$p = 4{,}8278\ , \text{d'où } z = \frac{0{,}0000253}{1{,}1180438} = 0{,}00002263,$$

et de là

$$x = z + p = 4{,}82782263.$$

A l'égard de la première approximation 4,8, on découvre aisément que 2000 est compris entre

$$4^4 = 256\,;\ 5^5 = 3125\,;$$

donc x est entre 4 et 5. Supposons

$$x = 4{,}5 = \tfrac{9}{2}\,;$$

on voit qu'il faudrait qu'on eût

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{9}{2}} = 2000\,;$$

mais

$$\left(\frac{9}{2}\right)^4 \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6561}{16} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 870$$

à très-peu-près : le nombre est donc entre 4,5 et 5. Supposons $x = 4{,}8$; on a

$$4{,}8 \log 4{,}8 = 3{,}269958 = \log 1862\,,$$

et l'erreur est — 138, ensorte que prenant

$$x = 4{,}8$$

pour une première donnée, l'approximation est plus rapide. Cette solution fort simple est due à *Théveneau*, ancien professeur des Gardes de la Marine.

2°. *Trouver la somme des puissances* m *des racines d'une équation, immédiatement en coefficiens de cette équation, sans passer par les sommes des puissances inférieures* (1re sect. chap. XXVIII).

3°. *Connaissant les sommes des puissances des racines d'une équation, traduire un coefficient quelconque de l'équation en sommes de ces puissances.*

Soit une équation d'un degré quelconque

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V = 0,$$

dont a, b, c, d, etc. sont les racines : on aura

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$

et faisant $x = \frac{1}{z}$ puis multipliant par z^m, on obtiendra la transformée

$$1 + Az + Bz^2 + \ldots + Vz^m = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz) \text{ etc.}$$

et prenant de part et d'autre les logarithmes hyperboliques

$$l.\,(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots) = l.\,(1 - az) + l.\,(1 - bz) + l.\,(1 - cz) + l.\,(1 - dz) + \text{etc.}$$

Mais on a trouvé (n° 74)

$$l.\,(1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} - \text{etc.}$$

donc faisant b successivement $= az$, $= bz$, $= cz$, $=$ etc., on aura

$$\begin{aligned} l.(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc}\ldots) = & -(a + b + c + d + \text{etc.})\,z \\ & -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.})\,\frac{z^2}{2} \\ & -(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.})\,\frac{z^3}{3} \\ & -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.})\,\frac{z^4}{4} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

posant donc

$$\begin{aligned} S_1 &= a + b + c + d + \text{etc.} \\ S_2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} \\ S_3 &+ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} \\ S_4 &+ a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

l'identité précédente devient

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.})=-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.}$$

mais

$$l.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.};$$

faisant donc dans ce développement

$$x=Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}$$

et ordonnant par rapport aux puissances de n, on obtient cette identité

$$-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.}$$

$$=Az+\left.\begin{array}{l}B\\-\frac{A^2}{2}\end{array}\right\}z^2+\left.\begin{array}{l}C\\-\frac{2AB}{2}\\+\frac{A^3}{3}\end{array}\right\}z^3+\left.\begin{array}{l}D\\-\frac{2AC}{2}\\-\frac{B^2}{2}\\+\frac{3A^2B}{3}\\-\frac{A^4}{4}\end{array}\right\}z^4+\text{etc.}$$

Et comparant les coefficiens des mêmes puissances de z, on trouve les relations suivantes :

$$S_1=-A$$

$$S_2=-\tfrac{2}{1}B+\tfrac{2}{2}A^2$$

$$S_3=-\tfrac{3}{1}C+\tfrac{3}{2}2AB-\tfrac{3}{3}A^3$$

$$S_4=-\tfrac{4}{1}D+\tfrac{4}{2}(2AC+B^2)-\tfrac{4}{3}3A^2B+\tfrac{4}{4}A^4$$

$$S_5=-\tfrac{5}{1}E+\tfrac{5}{2}(2AD+2BC)-\tfrac{5}{3}(3A^2C+3AB^2)$$
$$+\tfrac{5}{4}4A^3B-\tfrac{5}{5}A^5.$$

etc.

L'avantage de ces formules sur celles que nous avons données (1re sect. n° 301), consiste en ce que, dans les expressions précédentes des sommes successives des puissances des racines, il n'entre que les coefficiens de l'équation, ensorte que pour calculer l'une de ces sommes, on n'a pas besoin d'évaluer celles qui précèdent. Pour que ces formules soient identiques avec celles du n° cité, il faut faire les coefficiens A, C, E, etc. négatifs.

Nous passerons à la solution de la seconde question, et pour la résoudre, nous partirons de cette formule trouvée précédemment

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.})=-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.}$$

qui n'est autre chose que

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc})=le^{-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.}}$$

en observant que $le=1$; et passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}=e^{-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.}}$$

Tout se réduit donc à développer le second membre suivant les puissances de z, au moyen de la formule

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

donnée (n° 74), dans laquelle on fera

$$x=-S_1z-\frac{S_2}{2}z^2-\frac{S_3}{3}z^3-\frac{S_4}{4}z^4-\text{etc.};$$

et après avoir ordonné le résultat suivant les puissances de z, on trouvera

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}=1-S_1z-\left.\begin{matrix}\frac{S_2}{2}\\+\frac{S_1^2}{2}\end{matrix}\right\}z^2-\left.\begin{matrix}\frac{S_3}{3}\\+\frac{S_1S_2}{1.2}\\-\frac{S_1^3}{2.3}\end{matrix}\right\}z^3+\text{etc.}$$

d'où on déduit

$$A=-S_1,$$
$$B=-\frac{S_2}{2}+\frac{S_1^2}{1.2},$$
$$C=-\frac{S_3}{3}+\frac{1}{1.2}2S_1\frac{S_2}{1.2}-\frac{S_1^3}{1.2.3},$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Waring a donné, pour la solution de ce problême, une formule qu'il compose par les combinaisons, et qui s'accordent avec les précédentes : elle se trouve dans ses *Meditationes algebraicæ*, cap. I, probl. III, coroll., ainsi que dans son premier ouvrage de 1762.

4°. Enfin nous ferons connaître un usage très-simple de la formule

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

enseigné par Lagrange dans le volume cité, pour trouver le développement d'une puissance quelconque d'une quantité composée d'autant de termes que l'on voudra. En effet, si à la place de x, on met $i(p+q+r+\text{etc.})$, on aura

$$e^{i(p+q+r+\text{etc.})}=1+i(p+q+r+\text{etc.})+\frac{i^2}{1.2}(p+q+r+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{i^3}{1.2.3}(p+q+r+\text{etc.})^3+\text{etc.}$$

Ainsi le terme multiplié par i^m, sera

$$\frac{(p+q+r+\text{etc.})^m}{1.2.3\ldots\ldots m};$$

d'un autre côté, on a

$$e^{i(p+q+r+etc.)}=e^{ip}\times e^{iq}\times e^{ir}\times\text{etc}=\left(1+ip+\frac{i^2p^2}{1.2}+\frac{i^3p^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+iq+\frac{i^2q^2}{1.2}+\frac{i^3q^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+ir+\frac{i^2r^2}{1.2}+\frac{i^3r^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Donc le coefficient de i^m, dans le développement de ces différens produits, multiplié par $1.2.3\ldots\ldots m$, sera la valeur de $(p+q+r+\text{etc.})^m$. Or il est visible que ce coefficient se trouvera composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{p^\lambda q^\mu r^\nu\ldots\ldots}{1.2.3\ldots\lambda\times 1.2.3\ldots\mu\times 1.2.3\ldots\nu\times\ldots}$$

que l'on peut donner de valeurs différentes à λ, μ, ν, etc.; de sorte qu'on ait

$$\lambda+\mu+\nu+\text{etc.}=m.$$

en prenant pour λ, μ, ν, etc. des nombres entiers positifs. Ainsi la puissance $(p+q+r+\text{etc.})^m$ sera composée d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots m\,p^\lambda q^\mu r^\nu\ \text{etc.}}{1.2.3\ldots\lambda\times 1.2.3\ldots\mu\times 1.2.3\ldots\nu\times\text{etc.}}$$

ce qui s'accorde avec ce que donne la théorie des combinaisons.

CHAPITRE XVI.

Développemens des quantités trigonométriques.

80. Nous passerons à la recherche des développemens de sinus et cosinus d'un arc en des séries qui procèdent suivant les puissances de l'arc. Nous observerons d'abord à l'égard de sin x, 1°. que tous les termes du développement doivent contenir l'arc x en facteur, parce que lorsque l'arc devient nul, le sinus est nul aussi ; 2°. que dans aucun de ces termes, l'arc ne doit être affecté d'un exposant fractionnaire positif, ou d'un exposant négatif, entier ou fractionnaire, parce que la série étant, par exemple, de cette forme

$$\sin x = Ax + Bx^2 + \ldots\ldots + Gx^{\frac{m}{n}} \times \sqrt[n]{1} + \text{etc.},$$

à un arc particulier, donné en parties du rayon, correspondraient n valeurs du sinus, puisque l'unité a un nombre n de racines de l'ordre n, lesquelles sont données par la résolution de l'équation

$$y^n - 1 = 0;\ \text{d'où}\ y = \sqrt[n]{1}.$$

L'hypothèse précédente n'est donc pas admissible ; on ne peut supposer

$$\sin x = Ax + Bx^2 + \ldots\ldots + Gx^{-m} + \text{etc.}$$

parce que, pour $x = 0$, on aurait $\sin 0 = \frac{G}{0} = \infty$, ce qui est absurde. Si on observe aussi que pour $x = 0$, le cosinus ne devient pas nul, on déduira de ce qui précède cette

forme générale des développemens de sin x et cos x

$$\sin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$$
$$\cos x = A' + B'x + C'x^2 + \text{etc.}$$

ou A, B, C, etc. A', B', C', etc. sont des coefficiens indépendans de x, et indéterminés qu'il s'agit d'évaluer.

Mais si on observe encore que lorsque x devient $-x$, $\sin x$ devient $-\sin x$, on aura

$$\sin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$
$$-\sin x = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 - \text{etc.}$$

et ajoutant ces deux identités, puis divisant par 2,

$$0 = Bx^2 + Dx^4 + Fx^6 + \text{etc.}$$

d'où l'on conclut que les termes des puissances paires de x ne doivent pas rester dans la série du sinus. On a pour $+x$ et pour $-x$

$$\cos x = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}$$
$$\cos x = A' - B'x + C'x^2 - D'x^3 + \text{etc.};$$

et retranchant le second développement du premier, il vient, après avoir divisé par 2,

$$0 = B'x + D'x^3 + \text{etc.}$$

c'est-à-dire que les puissances impaires de x ne doivent pas faire partie du développement de cos x. On doit donc poser

$$\sin x = Ax + Cx^3 + Ex^5 + \text{etc.} \ldots\ldots (1)$$
$$\cos x = A' + C'x^2 + E'x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots (2)$$

Pour évaluer les coefficiens indéterminés A, C, E, etc. nous ferons usage de la propriété suivante, qu'on démontre en trigonométrie,

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Si dans l'identité (1), nous écrivons $3x$ pour x, puisque nous

prenions trois fois le développement de sin x, et que nous en retranchions quatre fois le cube du sinus, nous aurons

$$3Ax + 3^3\ Cx^3 + 3^5Ex^5 + 3^7\ Gx^7 + \text{etc.}$$

$$= 3Ax + \left.\begin{matrix} 3C \\ -4A^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 3E \\ -3.4A^2C \end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix} 3G \\ -3.4AC^2 \\ -3.4A^2E \end{matrix}\right\} x^7 + \text{etc.}$$

et comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouve

$$A = A$$
$$3^3C = 3C - 4A^3$$
$$3^5E = 3E - 3.4A^2C$$
$$3^7.G = 3G - 3.4AC^2 - 3.4.A^2E,$$
etc.;

d'où l'on déduit

$$A = A$$
$$(3^5 - 3)\ C = -4A^3$$
$$(3^5 - 3)\ E = -3.4A^2C$$
$$(3^7 - 3)\ G = -3.4.A(C^2 + AE);$$
etc.

et enfin

$$A = A,\ C = -\frac{A^3}{1.2.3},\ E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5},\ G = -\frac{A^7}{2.3.4.5.6.7},\ \text{etc.}$$

La première équation fait voir que le coefficient A reste indéterminé; pour l'évaluer, nous observerons que n exprimant le nombre de fois que la longueur de l'arc x est contenue dans la demi-circonférence, le sinus restera toujours le même et de même signe pour les arcs

$$x,\ (n-1)\,x,\ (2n+1)\,x,\ (3n-1)\,x,\ (4n+1)\,x,\ \text{etc.}$$

on pourra donc prendre

$$A = 1,\ A = n-1,\ A = 2n+1 \ldots\ldots A = (m-1)\,n - 1;\ A = mn + 1$$

m étant un nombre entier pair : la détermination la plus simple est, sans doute, $A = 1$, d'où résulte ce développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Nous avons trouvé pour la forme générale du développement de $\cos x$,

$$\cos x = A' + C'x^2 + E'x^4 + G'x^6 + \text{etc.} :$$

pour déterminer les coefficiens A', C', etc. nous partirons de la formule connue

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x ;$$

et mettant pour $\cos 2x$ et $\sin^2 x$ leurs valeurs en séries, il vient

$$A' + 2^2 C'x^2 + 2^4 E'x^4 + 2^6 G'x^6 + \text{etc.} =$$
$$1 - 2\left[x^2 - \frac{2}{1.2.3}x^4 + \left.\begin{matrix}\frac{2}{1.2.3.4.5} \\ + \frac{1}{1.1.2.2.3.3}\end{matrix}\right\} x^6 + \text{etc.}\right] :$$

égalant les coefficiens des mêmes puissances de x, on obtient

$$A' = 1,\ C' = -\frac{1}{1.2},\ E' = \frac{1}{1.2.3.4},\ G' = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6},\ \text{etc.}$$

et conséquemment

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

81. Cette méthode offre le double avantage de la facilité de l'exposition, et de la brièveté du calcul : cependant nous croyons devoir faire connaître le procédé de développement

le plus généralement employé, et que nous extrayons, à très-peu-près, *de la Trigonométrie de Legendre*, page 395.

Si on développe $(\cos A + \sin A\sqrt{-1})^m$ au moyen de la formule de *Newton*, on aura

$$\cos mA + \sin mA\sqrt{-1} = \cos^m A + m\cos^{m-1} A \sin A\sqrt{-1}$$
$$-\frac{m.m-1}{1.2}\cos^{m-2}.A\sin^2 A - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cos^{m-3}.A\sin^3 A\sqrt{-1}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\cos^{m-4}.A\sin^4.A + \text{etc.}$$

Faisant passer tous les termes dans le premier membre, et représentant par P la totalité des termes réels et par $Q\sqrt{-1}$ la somme des termes imaginaires, on aura

$$P + Q\sqrt{-1} = 0\text{; d'où } P = 0 \text{ et } Q = 0,$$

et conséquemment

$$(A)\ldots\ldots \cos mA = \cos^m.A - \frac{m.m-1}{1.2}\cos^{m-2}A\sin^2.A$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\cos^{m-4}.A\sin^4.A - \text{etc.}$$

$$(B)\ldots \sin mA = m\cos^{m-1}.A\sin A\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cos^{m-3}.A\sin^3 A + \text{etc.}$$

Ces formules donnent le sinus et le cosinus d'un multiple quelconque d'un arc en fonction du sinus et du cosinus de l'arc simple, et nous nous proposons d'abord d'examiner s'il ne serait pas possible d'exprimer le sinus de l'arc multiple seulement en sinus de l'arc simple. A cet effet, il faudrait dans l'expression de $\sin mA$, substituer au lieu de $\cos A$, sa valeur $\sqrt{1-\sin^2 A}$; mais nous remarquerons que m étant impair, toutes les puissances du cosinus dans $\sin mA$, sont paires, qu'ainsi

dans la substitution, le radical disparaîtra. On peut donc, dans ce cas, exprimer sin mA en fonction du sinus de l'arc simple. Mais lorsque m est pair, toutes les puissances du cosinus sont impaires, le radical ne disparaît plus, et il devient impossible d'exprimer sin mA, au moyen de l'arc simple seulement. On démontrera de la même manière, qu'il est toujours possible d'exprimer cos mA au moyen du seul cosinus de l'arc simple. L'exposant m étant un nombre entier, les séries ci-dessus sont nécessairement limitées; de plus, le développement du binome devant contenir $m+1$ termes, si m est impair, chacune des formules (A) et (B) en contiendra un nombre $\frac{m+1}{2}$; et si m est pair, la série (A) renfermera $\frac{m}{2}+1$ termes et la série (B) ne sera composée que de $\frac{m}{2}$ termes.

Nous pouvons écrire les développemens de sin mA et cos mA comme il suit :

$$\cos mA = \cos m.A \left\{ 1 - \frac{m.m-1}{1.2} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} \cdot \frac{\sin^4 A}{\cos^4 A} - \text{etc.} \right\}$$

$$\sin mA = \cos^m A \left\{ m.\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \cdot \frac{\sin^3 A}{\cos^3 A} + \text{etc.} \right\}$$

En observant que $\frac{\sin A}{\cos A} = \tang A$, ces séries se transformeront dans les suivantes

$$\cos mA = \cos^m. A \left\{ 1 - \frac{m.m-1}{1.2} \tang^2 A + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} \tang^4 A = \text{etc.} \right\}$$

$$\sin mA = \cos^m A \left\{ m \tang A - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \tang^3 A + \text{etc.} \right\}$$

Faisons maintenant $mA = x$, et nous aurons

$$(C)\ldots \cos x = \cos^m . A\left\{1 - \frac{x.x-A}{1.2}.\frac{\tang^2 A}{A^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3.4}.\frac{\tang^4 A}{A^4} - \text{etc.}\right\}$$

$$(D)\ldots \sin x = \cos^m A\left\{\frac{x}{1}.\frac{\tang A}{A} - \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3}.\frac{\tang^3 A}{A^3} + \text{etc.}\right\}$$

Mais de ce que A variant, le produit x ne change pas, en prenant convenablement m, c'est-à-dire, de telle manière que le produit mA reste constant, il suit que $\sin x$ et $\cos x$ doivent rester les mêmes, pour toutes les valeurs que l'on donne à A : donc les développemens de $\sin x$ et $\cos x$ ne doivent renfermer que les termes indépendans de A : pour les obtenir, il faut chercher à reconnaître la forme des développemens de $\cos^m A$ et de $\tang A$, suivant les puissances de A. D'abord on démontrerait, comme nous l'avons fait dans la première méthode à l'égard des séries de $\sin x$ et $\cos x$, que le développement de $\tang A$ doit procéder suivant des puissances entières et positives de l'arc, et aussi que l'arc doit entrer dans tous les termes, puisqu'en faisant $A = 0$, on doit trouver $\tang A = 0$. Nous pourrons donc légitimement supposer

$$\tang A = PA + QA^2 + RA^3 + \text{etc.}$$

d'où résulte

$$\frac{\tang A}{A} = P + QA + RA^2 + \text{etc.}$$

Cela posé, on a (*)

(*) 1°. AT est $> AM$, parce que le triangle ATC : secteur ACM :: $AT \times \frac{1}{2} AC : AM \times \frac{1}{2} AC :: AT : AM$. 2°. MAN est $> MN$; donc AM est $> MP$. Fig. 8.

$$\tang A > A, \text{ d'où } \frac{\tang A}{A} > 1;$$

on a en même temps

$$A > \sin A, \text{ donc } \frac{\tang A}{A} < \frac{\tang A}{\sin A}, \text{ ou } \frac{\tang A}{A} < \frac{1}{\cos A}.$$

De là on voit que le rapport $\frac{\tang A}{A}$ est toujours compris entre les limites 1 et $\frac{1}{\cos A}$: soit $A = 0$, on aura $\cos A = 1$; donc pour cette valeur particulière de l'arc

$$\frac{\tang A}{A} = 1 + \delta, \text{ et } \frac{\tang A}{A} = 1 - \delta;$$

conséquemment

$$\frac{\tang A}{A} = 1,$$

donc le coefficient P qui est indépendant de l'arc, est $= 1$,

et $$\frac{\tang A}{A} = 1 + QA + RA^2 + \text{etc.}$$

On a fait voir que le développement de $\cos^m A$ devait procéder suivant toutes les puissances entières et positives de A; de plus, le premier terme ne doit pas contenir l'arc, afin que pour $A = 0$, on ait $\cos^m A = 1$; donc

$$\cos^m A = 1 + Q'A + R'A^2 + \text{etc.}$$

Voyons donc ce que deviennent les séries (C) et (D) : d'abord les premiers termes des rapports $\frac{\tang A}{A}$, $\frac{\tang^2 A}{A^2}$ .... $\frac{\tang^m A}{A^m}$ seront toujours l'unité, et les termes subséquens ne doivent

doivent pas être considérés, parce qu'ils introduiraient l'arc A qui ne doit pas rester dans les développemens ; par la même raison, on ne peut employer que le premier terme du développement du facteur $\cos^m A$: on aura donc

$$(E) \ldots \cos x = 1 - \frac{x.\overline{x-A}}{1.2} + \frac{x.\overline{x-A}.\overline{x-2A}.\overline{x-3A}}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$(F) \ldots \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x.\overline{x-A}.\overline{x-2A}}{1.2.3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{x.\overline{x-A}.\overline{x-2A}.\overline{x-3A}.\overline{x-4A}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Or il est évident que si on effectuait les opérations indiquées dans ces développemens, les termes indépendans de A seraient ceux qui résulteraient du produit des premiers termes des facteurs binomes ; donc enfin on parvient à

$$(G) \ldots\ldots \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$$

$$+ \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

$$(K) \ldots\ldots \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

séries qui sont les mêmes que celles que nous avons précédemment obtenues. On remarquera que, dans cette méthode, la loi des coefficiens numériques est plus manifeste, en ce qu'elle dérive immédiatement de celle des coefficiens de la puissance m d'un binome, tandis que dans l'autre analyse elle résultait de la puissance m d'un infinitinome.

82. Ces mêmes valeurs $\sin x$ et $\cos x$ données par les formules (G) et (K) peuvent s'énoncer d'une manière plus succincte au moyen des exponentielles : en effet, si dans la première de ces trois séries

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 \quad - \frac{x^2}{1.2} \quad + \frac{x^4}{1.2.3.4} \quad - \text{etc.}$$

$$\sin x = \quad + x \quad - \frac{x^3}{1.2.3} \quad + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

on écrit $x\sqrt{-1}$ à la place de x, et qu'on multiplie les deux membres de la troisième par $\sqrt{-1}$, on trouvera par la seule inspection

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1} \ldots\ldots (L)$$

et prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe moins

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x \sqrt{-1} \ldots\ldots (M).$$

L'addition de ces formules donne

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \ldots\ldots\ldots (N).$$

Si on soustrait la seconde de la première, on obtient

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots (P).$$

Il résulte de la division de (P) par (N)

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \right\}.$$

83. Les formules (L) et (M) donnent

$$x\sqrt{-1} = l.\ (\cos x + \sin x \sqrt{-1})$$
$$-x\sqrt{-1} = l\ (\cos x - \sin x \sqrt{-1})$$

l indiquant toujours un logarithme hyperbolique ; on déduit de là

$$x\sqrt{-1} = l.\cos x + l\,(1+\sqrt{-1}.\tang x)\ldots.(R)$$
$$-x\sqrt{-1} = l.\cos x + l\,(1-\sqrt{-1}\ \tang x)\ldots.(S):$$

retranchant (S) de (R), il vient pour résultat

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\tang x}{1-\sqrt{-1}.\tang x}\right\}\ldots\ldots.(T);$$

mais on sait (n° 74) que

$$l\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 2\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\text{etc}\right)$$

ensorte qu'écrivant $\sqrt{-1}$ tang x au lieu de b, et divisant de part et d'autre par $\sqrt{-1}$, on aura

$$x = \tang x - \tfrac{1}{3}\tang^3 x + \tfrac{1}{5}\tang^5 x - \tfrac{1}{7}\tang^7 x + \ldots.(V)$$

formule qui sert à calculer l'arc par sa tangente, lorsque celle-ci est plus petite que l'unité. Qu'on fasse

$$x = \frac{\pi}{2},$$

π désignant la demi-circonférence, (V) devient

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

à cause de tang $\frac{\pi}{2} = 1$: mais cette série est trop peu convergente pour être employée avec succès, et nous la remplacerons par deux autres dues à *Bertrand de Genève*, au moyen desquelles on peut calculer très-rapidement une valeur très-approchée de l'arc $\frac{\pi}{2}$, ou de 50°, dans la circonférence divisée en 400 parties. A cet effet, reprenons la formule connue

$$\tang 2a = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a}.$$

Prenant $\tang a = \frac{1}{5}$, on trouve

$$\tang 2a = \frac{5}{12},$$

et conséquemment $2a < 50°$, puisque $\tang 50° = 1$. D'après cette valeur de $\tang 2a$, on aura

$$\tang 4a = \frac{2 \tang 2a}{1 - \tang^2 2a} = \frac{120}{119},$$

d'où l'on conclut $4a > 50°$. Soient

$4a = A$, $50° = B$, $A - B = b$, d'où $50° = A - (A - B) = 4a - b$:

on connaît déjà la valeur numérique de $\tang A$ ou de $\tang 4a$; cherchons celle de $\tang (A - B)$, qui est

$$\tang (A - B) = \frac{\tang A - \tang B}{1 + \tang A \tang B} = \frac{1}{239} = \tang b.$$

Maintenant, si dans la formule V, on remplace ; 1°. x par a et $\tang x$ par $\frac{1}{5}$; 2°. x par b, et $\tang x$ par $\frac{1}{239}$; on aura

$$4a = 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right\}$$

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.}$$

et conséquemment

$$\frac{\pi}{2} \text{ ou } 50° = 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right\}$$

$$- \left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{2(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.}\right\}$$

série très-convergente, de laquelle on conclura l'arc de 50° et conséquemment tous les autres en parties du rayon.

84. Si dans le développement de e^x trouvé précédemment, on fait successivement

$$x=2\sqrt{a}, \text{ et } x=-2\sqrt{a};$$

on trouvera que

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a}=2a\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3.....7}+\text{etc.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3...6}+\text{etc.}}$$

Qu'on applique au développement en fraction continue du facteur de $2a$, la méthode donnée (n° 9), on aura

$$b=1,\ b'=\frac{2}{3}a,\ b''=\frac{2a^2}{3.5};\ b'''=\frac{4a^3}{5.7.9}$$

$$a=1,\ a'=2a,\ a''=\frac{2a^2}{3};\ a'''=\frac{4a^3}{5.9}$$

$$c=\frac{4}{3}a,\ d=\frac{4}{3.5}a,\ e=\frac{16}{3.5.7}a^2,\ \text{etc.}$$

ensorte que

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a}=$$

$$2a.\cfrac{1}{\frac{1}{1}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{4}{5}a}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{4}{3}a}{\cfrac{}{\frac{4}{3.5}a}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{4}{3.5}a}{\cfrac{}{\frac{16}{3.5.7}a^2}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{16}{3.5.7}a^2}{\text{etc.}}}}}}}}}$$

et toutes réductions faites, on obtient

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\ \frac{4a}{1+}\ \frac{4a}{3+}\ \frac{4a}{5+}\ \frac{4a}{7+}\ \text{etc.}$$

Qu'on fasse $4a=-x^2$, et en vertu de la formule

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}.\ \tang x$$

trouvée plus haut, on aura

$$\tang x=\frac{x}{1-}\ \frac{x^2}{3-}\ \frac{x^2}{5-}\ \frac{x^2}{7-}\ \text{etc.}$$

transformation à laquelle *Legendre* est parvenu par un procédé bien différent. (*Voyez sa Géométrie, 4*^{eme} *édit. Note IV*). Cette fraction continue est l'inverse de celle qu'on lit (n° 9).

85. Des formules (N) et (P), on déduit en changeant x en $x\sqrt{-1}$,

$$\cos x\sqrt{-1}=\frac{e^{-x}+e^{+x}}{2}\ \ldots\ldots(M')$$

$$\sin x\sqrt{-1}=\frac{e^{-x}-e^{+x}}{2\sqrt{-1}}\ \ldots\ldots(N')$$

ensorte que la propriété

$$\sin 2a=2\cos a\sin a,$$

qui suppose la formule

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

lieu pour un arc imaginaire. En effet, on a, d'après (N')

$$\sin 2x\sqrt{-1} = \frac{e^{-2x} - e^{+2x}}{2\sqrt{-1}},$$

et d'après (M') et (N')

$$2\cos x\sqrt{-1}.\sin x\sqrt{-1} = \frac{e^{-2x} - e^{+2x}}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\sin 2x\sqrt{-1} = 2\cos x\sqrt{-1}.\sin x\sqrt{-1},$$

et conséquemment

$$\sin[(x+y)\sqrt{-1}] = \sin x\sqrt{-1}.\cos y\sqrt{-1} + \sin y\sqrt{-1}.\cos x\sqrt{-1};$$

extension du théorème connu à des arcs imaginaires. Si on élève au quarré les deux membres des transformations (M') et (N'), on trouvera, après les réductions,

$$\sin^2 x\sqrt{-1} + \cos^2 x\sqrt{-1} = 1.$$

86. Qu'on change dans (L) et (M) x en mx, ce qui donne

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}} = \cos mx \pm \sin mx\sqrt{-1},$$

puisqu'on élève les deux membres de (L) et de (M) à la puissance m, d'où résulte

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}} = (\cos x \pm \sin x\sqrt{-1})^m,$$

et qu'on écrive l'identité entre les seconds membres, on retrouvera cette formule déjà obtenue (n°. 54).

87. Quant à l'emploi numérique des formules données dans ce titre, ou à la construction des tables, nous renverrons

au discours qui accompagne les tables de *Callet*, dans lequel j'ai consigné l'annonce des grandes tables logarithmiques et trigonométriques décimales du cadastre, *monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui ait jamais été exécuté ou même conçu*, (ce sont les termes employés par les *citoyens Lagrange*, *Laplace et Delambre*, dans un rapport fait à l'Institut). Ces tables du Cadastre ont été calculées par une méthode entièrement nouvelle, et qui avait cet avantage qu'on pouvait employer à-la-fois un nombre indéfini de calculateurs, de la plupart desquels on ne pouvait exiger d'autres connaissances que celles de l'addition et de la soustraction. Différens motifs ont fait suspendre l'impression de ce grand travail ; mais, ajoutent les géomètres chargés du rapport, espérons que dans des temps de paix et de bonheur, un Gouvernement ami des arts, ordonnera l'achèvement d'un ouvrage qui doit être desiré de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques : un tel vœu, émis par les premiers géomètres, est pour moi une raison de plus de me féliciter d'avoir coopéré à ce grand œuvre, sous le *citoyen Prony*, alors directeur du cadastre. Nous recommanderons encore la lecture des préfaces de l'auteur et de l'éditeur des tables logarithmiques et trigonométriques décimales calculées par *Borda*, revues, augmentées et publiées par *Délambre*, membre de l'Institut national de France et du Bureau des longitudes ; la construction des tables de sinus (*Trigonométrie de Legendre*) et les chapitres VI et VII de la trigonométrie de *Cagnoli*.

88. Ceux qui voudront plus de détails sur la matière de ce numéro, pourront consulter un ouvrage de *Suremain-Missery*, ayant pour titre : *Théorie purement algébrique des quantités imaginaires*. Que dans la formule (T) on suppose $x=\frac{\pi}{2}$, π désignant toujours la demi-circonférence ; on aura $\operatorname{tang} x=\infty$ et la formule (T) deviendra

$$\pi\sqrt{-1} = l\left(\frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}\right), \text{ d'où } \pi = -\sqrt{-1}\, l(-1),$$

résultat qui nous conduit naturellement à parler des logarithmes des nombres négatifs qui donnèrent lieu à une contestation entre *Leibnitz* et *Bernouilli ;* mais sans rappeler ici cette discussion, nous démontrerons, d'après *Euler*, *qu'un nombre quelconque positif a une infinité de logarithmes dont un seul est réel, et tous les autres imaginaires.*

Reprenons à cet effet la formule

$$x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x\sqrt{-1})\,;$$

à $x = 0$ correspond

$$0 = l.\,1,$$

ce qu'on sait déjà. Désignant par π la demi-circonférence, à $x = 2\pi$, $= 4\pi$, $= 6\pi$, etc. correspondront

$$2\pi\sqrt{-1} = l.\,1$$
$$4\pi\sqrt{-1} = l.\,1$$
$$6\pi\sqrt{-1} = l.\,1,$$

et généralement

$$2k\pi\sqrt{-1} = l.\,1,$$

k étant un nombre entier. Mais on a

$$l.\,A = l.\,A + l.\,1\,;$$

donc

$$l.\,A = l.\,A + 2k\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on conclut *qu'un nombre quelconque* A *admet une infinité de logarithmes dont un seul est réel.*

Si dans la même formule

$$x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x\sqrt{-1})$$

on suppose $x=\pi$, on aura

$$\cos x=-1\text{, et }\sin x=0\,;$$

donc

$$l(-1)=\pi\sqrt{-1},$$

ce qui vérifie la propriété

$$\pi=-\sqrt{-1}\,l(-1)$$

trouvée plus haut. Soit $x=3\pi;=5\pi,=7\pi\ldots\ldots(2k+1)\pi$, k étant un nombre entier ; on aura

$$3\pi\sqrt{-1}=l(-1)$$
$$5\pi\sqrt{-1}=l(-1)$$
$$7\pi\sqrt{-1}=l(-1),$$

etc.

et généralement

$$(2k+1)\pi\sqrt{-1}=l(-1).$$

Or

$$-A=A\times-1\,;$$

donc

$$l.(-A)=l.A+l.(-1),$$

et conséquemment

$$l.(-A)=l.A+(2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on conclut *que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires.*

Il est clair que ces conclusions s'étendent aux logarithmes tabulaires.

CHAPITRE XVII.

Extension du théorême démontré (n° 2) aux fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires.

89. On a prouvé (n° 2) que toute fonction algébrique de la quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$ était réductible à la même forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles. Les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires sont aussi réductibles à la même forme, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit, 1°. $l.(a + b\sqrt{-1})$: en faisant (n° 63)

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} = k,\ \cos z = \frac{a}{k},\ \sin z = \frac{b}{k},$$

on a

$$a \pm b\sqrt{-1} = k(\cos z \pm \sin z)\sqrt{-1},$$

et $\quad l.(a \pm b - 1) = l.k + l.(\cos z \pm \sin z\sqrt{-1});$

mais la propriété

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sin z\sqrt{-1}$$

donne

$$\pm z\sqrt{-1} = l.(\cos z \pm \sin z\sqrt{-1});$$

donc

$$l.(a \pm b\sqrt{-1}) = l.k \pm z\sqrt{-1}.$$

Les données étant seulement z, $\cos z$ et $\sin z$, on pourra prendre au lieu de l'arc z, les arcs $2\pi + z$, $4\pi + z$, etc.

$2n\pi + z$, n étant un nombre entier; ensorte qu'on aura pour $l(a \pm b\sqrt{-1})$ une infinité de valeurs comprises dans la même formule $l.k \pm (2n\pi + z)\sqrt{-1}$; donc

$$P = l.k,\ Q = (2n\pi + z).$$

Considérons, en second lieu, l'exponentielle $e^{a \pm b\sqrt{-1}}$: on a

$$e^{a \pm b\sqrt{-1}} = e^{a} \times e^{\pm b\sqrt{-1}} = e^{a}(\cos b \pm \sin b\sqrt{-1});$$

donc

$$P = e^{a}\cos b,\ Q = \pm e^{a}\sin b.$$

Soit en troisième lieu $(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}}$: on sait que

$$l.(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = (m \pm n\sqrt{-1})\,l.(a \pm b\sqrt{-1})$$
$$= l.e^{(m \pm n\sqrt{-1})l.(a \pm b\sqrt{-1})},$$

e désignant la base des logarithmes hyperboliques; et passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = e^{(m \pm n\sqrt{-1})\,l(a \pm b\sqrt{-1})}.$$

Si on substitue pour $l.(a \pm b\sqrt{-1})$ sa valeur $l.k \pm z\sqrt{-1}$, il en résultera

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = e^{(m \pm n\sqrt{-1})(l.k \pm z\sqrt{-1})}$$
$$= e^{ml.k - nz \pm (mz + nl.k)\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ml.k - nz} \times e^{\pm (mz + nl.k)\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ml.k - nz}[\cos(mz \pm nl.k) \pm \sin(mz \pm nl.k)\sqrt{-1}],$$

résultat de la forme

$$P \pm Q\sqrt{-1}.$$

Soit enfin la fonction circulaire $\sin(a \pm b\sqrt{-1})$, on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \sin a \cos b\sqrt{-1} \pm \cos a \sin b\sqrt{-1}.$$

Pour obtenir $\sin b\sqrt{-1}$, et $\cos b\sqrt{-1}$, on écrira $b\sqrt{-1}$, au lieu de x dans les formules

$$\sin x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \cos x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

et il résultera de ces substitutions

$$\sin b\sqrt{-1} = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2\sqrt{-1}}, \cos b\sqrt{-1} = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2};$$

substituant ces valeurs, on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right)\sin a \pm \left(\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right)\cos a\sqrt{-1}.$$

On trouverait aussi

$$\cos(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right)\cos a \pm \left(\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right)\sin a\sqrt{-1}.$$

Les autres fonctions circulaires, telles que la tangente, la sécante, etc. s'expriment algébriquement au moyen du sinus et du cosinus : elles seront donc aussi réductibles à la même forme

$$P \pm Q\sqrt{1}.$$

CHAPITRE XVIII.

Analyse des sections angulaires.

90. Les deux formules

$$2\cos mx \cos x = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x$$
$$2\sin mx \cos x = \sin(m+1)x + \sin(m-1)x$$

donnent en partant des premières valeurs de cos mx et sin mx, lorsque $m=0$ et $m=1$, et mettant, pour plus de simplicité, p et q à la place de cos x et sin x,

$$\cos x = 1$$
$$\cos x = p$$

$$\cos 2x = 2p\cos x - \cos 0x = 2p^2 - 1$$
$$\cos 3x = 2p\cos 2x - \cos x = 4p^3 - 3p$$

etc.

d'où résulte la table suivante,

$$\left.\begin{array}{l} \cos 1x = p \\ \cos 2x = 2p^2 - 1 \\ \cos 3x = 4p^3 - 3p \\ \cos 4x = 8p^4 - 8p^2 + 1 \\ \cos 5x = 16p^5 - 20p^3 + 5p \end{array}\right\} (A)$$

etc.

et, en général,

$$2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2p)^{m-6} + \text{etc.}$$

On trouvera de même

$$\left.\begin{array}{l}\sin 1x = \quad q \\ \sin 2x = \ 2pq \\ \sin 3x = (4p^2-1)q \\ \sin 4x = (8p^3-4p)q \\ \sin 5x = (16p^4-12p^2+1)q \\ \qquad \text{etc.}\end{array}\right\} (B)$$

et, en général,

$$\sin mx = q\left[(2p)^{m-1}-(m-2)(2p)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5}-\text{etc.}\right]$$

Ces séries procèdent suivant les puissances descendantes de p : on peut en avoir qui marchent suivant les puissances ascendantes de p ou de q ; mais alors il faut distinguer les cas de m nombre impair ou pair

Soit, 1°. m impair ; on aura

$$\left.\begin{array}{l}\cos 1x = p \\ \cos 3x = -(3p-4p^3) \\ \cos 5x = 5p-20p^3+16p^5 \\ \qquad \text{etc.}\end{array}\right\} (C)$$

et en général

$$\cos mx = \pm\left[mp-\frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3+\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}p^5-\text{etc.}\right]$$

Le signe supérieur ayant lieu dans le cas où m est de la forme $4n+1$, et l'inférieur dans celui où m est de la forme $4n+3$.

On aura de même, lorsque m est impair,

$$\left.\begin{array}{l}\sin 1x = q \\ \sin 3x = -q(1+4p^2) \\ \sin 5x = q(1-12p^2+16p^4) \\ \qquad \text{etc.}\end{array}\right\} (D)$$

et, en général,

$$\sin mx = \pm q \left[1 - \frac{m^2-1}{2} p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} p^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6} p^6 + \text{etc.} \right]$$

et l'on observera à l'égard du double signe, la même règle que ci-dessus.

Soit, 2°. m pair ; on aura

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= -(1-2p^2) \\ \cos 4x &= 1 - 8p^2 + 8p^4 \\ \cos 6x &= -(1-18p^2+48p^4-32p^6) \end{aligned}\right\} (E)$$

etc.

et, en général,

$$\cos mx = \pm \left[1 - \frac{m^2}{2} p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4} p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} p^6 + \text{etc.} \right]$$

Ensuite

$$\left.\begin{aligned} \sin 2x &= p \\ \sin 4x &= -q(4p-8p^3) \\ \sin 6x &= q(6p-32p^3+32p^5) \end{aligned}\right\} (F)$$

etc.

et, en général,

$$\sin mx = \mp q \left[mp - \frac{m(m^2-4)}{1.2.3} p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5} p^5 - \text{etc.} \right].$$

A l'égard du double signe, il faut prendre les signes supérieurs, lorsque m est de la forme $4n$, et les inférieurs lorsque m est de la forme $4n+2$.

Enfin, on aura aussi, à cause de $p^2 = 1 - q^2$, 1°. pour le cas de m impair,

cos

$$\left.\begin{array}{l}\cos 1x = p \\ \cos 3x = p\,(1 - 4q^2) \\ \cos 5x = p\,(1 - 12q^2 + 16q^4)\end{array}\right\} (G)$$

etc.

et, en général,

$$\cos mx = p\left[1 - \frac{m^2-1}{2}q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4}q^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}\right]$$

Ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\sin 1x = q \\ \sin 3x = 3q - 4q^3 \\ \sin 5x = 5q - 20q^3 + 16q^5\end{array}\right\} (H)$$

etc.

et, en général,

$$\sin mx = mq - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}q^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}$$

2°. Pour le cas de m pair,

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2x = 1 - 2q^2 \\ \cos 4x = 1 - 8q^2 + 8q^4 \\ \cos 6x = 1 - 18q^2 + 48q^4 - 32q^6\end{array}\right\} (I)$$

etc.

et, en général,

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}q^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}$$

Ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2x = 2pq \\ \sin 4x = p\,(4q - 8q^3) \\ \sin 6x = p\,(6q - 32q^3 + 32q^5)\end{array}\right\} (K)$$

etc.

et, en général,

$$\sin mx = p\left[mq - \frac{m(m^2-4)}{1.2.3}q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}\right]$$

Ces formules sont extraites du tome X des Séances des Écoles normales, seul ouvrage dans lequel elles se trouvent réunies.

Lagrange ajoute : Les formules (A) et (B) ne s'arrêtent pas, même lorsque m est un nombre entier positif; car en faisant $m = 1$, la première donne

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} + \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \text{etc.}$$

et la seconde donne

$$\sin x = q + \frac{q}{4p^2} + \frac{3q}{16p^4} + \text{etc.},$$

valeurs qui sont évidemment fausses. Il en sera de même en donnant à m d'autres valeurs quelconques entières et positives, et tenant compte de tous les termes qui ne sont pas nuls. Ceci tient à ce que par la nature des tables (A) et (B) dont ces formules ne sont que le terme général, on ne doit y employer que les termes qui contiennent des puissances positives de p; mais, observe ce géomètre, comme les termes qui suivent ne sont pas nuls, on ne voit pas, *à priori*, pourquoi on doit les rejeter, et on voit moins encore ce qu'exprimerait la formule en ne les rejetant pas. *Lagrange* donne le dénouement de ces difficultés, au moyen de la théorie des fonctions dérivées. Nous rapporterons ces considérations dans le Traité de Calcul différentiel et intégral.

91. Nous compléterons ce titre par l'exposition de deux formules qui donnent la valeur de la puissance m d'un cosinus ou d'un sinus en cosinus ou sinus d'arcs multiples. Soit proposé de trouver dabord la valeur de $\cos^m x$. Je fais

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = u;\quad \cos x - \sin x\sqrt{-1} = v:$$

ce qui donne

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(u+v) \text{ et } 2^m \cos^m x = (u+v)^m.$$

Je développe $(u+v)^m$ de deux manières, la première en ordonnant par rapport aux puissances u^m, u^{m-1}, u^{m-2}, etc., et la seconde en ordonnant par rapport aux puissances v^m, v^{m-1}, v^{m-2}, etc.; j'additionne les deux expressions et j'ai ce résultat

$$u^m + v^m + \frac{m}{1}(u^{m-1}v + v^{m-1}u) + \frac{m.m-1}{1.2}(u^{m-2}v^2 + v^{m-2}u^2)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(u^{m-3}v^3 + v^{m-3}u^3) + \text{etc.}$$

qui peut se changer en

$$u^m + v^m + \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})uv + \frac{m.m-1}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4})u^2v^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(u^{m-6} + v^{m-6})u^3v^3 + \text{etc.}$$

Cette expression donnant deux fois la valeur de $(u+v)^m$, ou de $2^m \cos^m x$, si on prend la moitié et qu'on observe que

$$uv = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})(\cos x - \sin x\sqrt{-1}) = 1$$

il viendra

$$2^m \cos^m . x = \tfrac{1}{2}(u^m + v^m) + \tfrac{1}{2} . \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})$$

$$+ \, . \, \frac{m.m-1}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4}) + \text{etc.}:$$

mais on sait que

$$u^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$

$$u^{m-2} = \cos(m-2)x + \sin(m-2)x\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

$$v^m = \cos mx - \sin mx\sqrt{-1},$$

$$v^{m-2} = \cos(m-2)x - \sin(m-2)x\sqrt{-1}, \text{ etc.};$$

donc

$$u^m + v^m = 2\cos mx;\ u^{m-2} + v^{m-2} = 2\cos(m-2)x; \text{ etc.}$$

ce qui change l'équation précédente en

$$2^m \cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1.2}\cos(m-4)x$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cos(m-6)x + \text{etc.}$$

Cette série est toujours terminée lorsque m est un nombre entier positif, et il faut observer 1°. que lorsqu'on est parvenu aux angles négatifs, on trouve la réplique des cosinus des angles positifs de même valeur; 2°. que tous les termes de la série à l'exception du milieu sont répétés deux fois : ce terme du milieu existe lorsque m est pair, et comme le cosinus qui l'affecte appartient à l'angle $(m-m)x$ dont le cosinus est l'unité, la valeur de $2^m \cos^m x$ contiendra, dans ce cas, un terme non affecté de cosinus.

Si dans la formule précédente, on fait

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - y,$$

il en résultera la valeur de $2^m \sin^m y$ qu'on calculera avec la même facilité, en ayant égard au changement de signes que comporte cette substitution. Ces formules et l'analyse qui les a fournies, ont été données par *Prony*, (3e *cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique*).

CHAPITRE XIX.

Sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique, des nombres figurés et des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une progression arithmétique, pris 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc. Résolution des équations dont les racines forment une progression par équidifférences.

92. SOIT la progression arithmétique ÷ $a.b.c.d...k.u$, ensorte qu'il s'agisse de trouver la somme

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \text{etc.} \quad k^m + u^m,$$

m étant un nombre entier et positif : par la nature de la progression, on a

$$\left\{\begin{array}{l} b = a + \delta \\ c = b + \delta \\ d = c + \delta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u = k + \delta \end{array}\right\}$$

δ étant la différence constante ; d'où on déduit les équations suivantes :

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} b^{m-1}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$u^m = c^m + mc^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} c^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

. . . .

. . . .

$$u^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2}k^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et effaçant les termes communs, on aura, en transposant a^m dans le premier membre,

$$u^m - a^m = m\delta\ (a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \text{etc}\ldots + k^{m-1})$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\delta^2\ (a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \text{etc}\ldots + k^{m-2})$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\delta^3 (a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \text{etc}\ldots + k^{m-3})$$
$$+ \text{etc.}$$

Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que les sommes des puissances successives de chacun des termes de la progression ci-dessus soient représentées par S_1, S_2, S_3, S_4... S_{m-1}, S_m; l'équation précédente deviendra, au moyen de ces abréviations,

$$u^m - a^m = m\delta\ (S_{m-1} - u^{m-1}) + \frac{m.m-1}{2}\delta^2\ (S_{m-2} - u^{m-2})$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\delta^3\ (S_{m-3} - u^{m-3}) + \text{etc}\ldots (Q)$$

Cette équation nous fait connaître la relation entre les sommes des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique, et par conséquent elle donnera S_{m-1}, lorsque les sommes S_1 S_2 S_3... S_{m-2} seront connues.

Nous observerons, à l'égard de cette méthode, qu'on est obligé pour calculer chaque somme, de connaître les sommes précédentes. La méthode suivante due à *Thomas Simpson*, est exempte de cet inconvénient.

On a pu observer sur la formule (Q) que S_{m-1} dépend de u^m, et des puissances u^{m-1}, u^{m-2}.......u^0 ; et qu'ainsi, après avoir remplacé u par sa valeur $a+(n-1)\delta$, la somme des puissances $m-1$ des termes de la progression, ordonnée par rapport aux puissances de n, sera de la forme

$$A'n^m + B'n^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + P'n$$

les coefficiens indéterminés A', B'....P' étant indépendans de n : on pourra donc supposer, par analogie,

$$S_m = a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots\ldots\ldots + \{a+(n-1)\delta\}^m$$
$$= An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Pn \,..(R),$$

A, B, C.... P étant pareillement des coefficiens indépendans de n qu'il s'agit de déterminer. Si l'on suppose la progression augmentée du terme $a+n\delta$, le nombre deviendra $n+1$ de n qu'il était, ensorte que (R) deviendra

$$a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots\ldots + \{a+(n-1)\delta\}^m + (a+n\delta)^m$$
$$= A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1} \ldots + P(n+1) \,..(S);$$

Retranchant (R) de (S), on trouvera

$$(a+n\delta)^m = A\,((n+1)^{m+1} - n^{m+1}) + B\,((n+1)^m - n^m)$$
$$+ C\,((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) \ldots\ldots + \ldots P$$

Si l'on fait les développemens indiqués, qu'on ordonne de part et d'autre suivant n, et qu'on égale les coefficiens des memes puissances de n, on parviendra aux égalités

$$\frac{m+1}{1}A=\delta^m$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2}A+\frac{m}{1}B=\frac{m}{1}a\delta^{m-1}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}A+\frac{m(m-1)}{1.2}B+\frac{m-1}{1}C=\frac{m(m-1)}{1.2}a^2\delta^{m-2}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}A+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}B+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.}C$$
$$+\frac{m-2}{1}D=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3\delta^{m-3},$$

etc.

desquelles on déduit

$$A=\frac{\delta^m}{m+1}$$

$$B=a\delta^{m-1}-\frac{m+1}{2}A$$

$$C=\frac{m}{2}a^2\delta^{m-2}-\frac{m}{2}B-\frac{(m+1)m}{1.2.3}A$$

$$D=\frac{m(m-1)}{1.2.3}a^3\delta^{m-3}-\frac{m-1}{2}C-\frac{m(m-1)}{1.2.3}B-\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}A,$$

etc.

Si dans ces formules on fait successivement $m=0, =1, =2, =3$, etc, etc. et qu'on substitue les valeurs correspondantes de A, B, C, etc. dans (R), on trouvera

$$S_0 = n$$

$$S_1 = \frac{\delta}{2}n^2 + \frac{2a-\delta}{2}n$$

$$S_2 = \frac{\delta^2}{3}n^3 + \delta\,\frac{2a-\delta}{2}n^2 + \frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{6}n$$

$$S_3 = \frac{\delta^3}{4}n^4 + \delta^2\frac{2a-\delta}{2}n^3 + \delta\,\frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{4}n^2 + \frac{2a^3-3a^2\delta+a\delta^2}{2}n$$

$$S_4 = \frac{\delta^4}{5}n^5 + \delta^3\frac{2a-\delta}{2}n^4 + \delta^2\frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{3}n^3 + \delta\,\frac{2a^3-3a^2\delta+a\delta^2}{1}n^2$$
$$+ \frac{30a^4-60a^3\delta+30a^2\delta^2-\delta^4}{30}n$$

$S_5 =$ etc.

S'il s'agissait de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4........n, on aurait $a = \delta = 1$, et les sommes ci-dessus deviendraient

$$S_0 = n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{n}{1}$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$S_2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \ldots\ldots = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{1.2.3}$$

$$S_3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 \ldots\ldots = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n. = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.3.4.5},$$

etc.

Ces formules en y faisant $n = 12$, donnent 650 pour la somme des 12 premiers quarrés, 6084 pour celle des douze premiers cubes, et 60710 pour celle des quatrièmes puissances des douze premiers nombres 1, 2........12, etc.

93. Dans l'hypothèse de $a = 1$,

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\{2+(n-1)\delta\} = n + \frac{n}{2}(n-1)\delta;$$

maintenant on aura

$$\text{pour } \delta = 1 \ldots\ldots S_1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1^\circ)$$

$$\delta = 2 \ldots\ldots S_1 = n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2^\circ)$$

$$\delta = 3 \ldots\ldots S_1 = n + \tfrac{3}{2}(n^2-n) = \frac{3n^2-n}{2} \ldots\ldots (3^\circ)$$

$$\delta = 4 \ldots\ldots S_1 = n + 2(n^2-n) = 2n^2 - n \ldots\ldots (4^\circ)$$

$$\delta = 5 \ldots\ldots S_1 = n + \tfrac{5}{2}(n^2-n) = \frac{5n^2-3n}{2} \ldots (5^\circ)$$

etc. etc. etc.

Si dans (1°) on fait successivement $n=1, =2, =3, =4$, etc. on aura la suite des nombres

1, 3, 6, 10, 15, etc.

Ces nombres ont été nommés *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'il est possible de disposer en triangle équilatéral un nombre de points, égal à celui des unités que chacun d'eux renferme.

La formule (2°) donne, par les mêmes substitutions, la suite

1, 4, 9, 16, 26, etc.

Ces nombres ont été nommés *quadrangulaires*, parce qu'il est possible de disposer en quarré un nombre de points, égal à celui d'unités qu'ils renferment. Chaque terme de cette dernière suite résulte de l'addition d'un certain nombre de termes de la suite des nombres impairs, à partir de l'unité inclusivement.

La formule (3°) donne la suite des nombres qu'on appelle

pentagones, à cause d'une propriété analogue aux précédentes.

Les nombres qui résultent de ces formules (1°), (2°), (3°), etc. portent collectivement la dénomination de *nombres figurés*.

La formule (R) donnée ci-dessus, sert à trouver la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite dont le terme général est exprimé par des puissances entières et positives du nombre des termes. Supposons, en effet, que le terme général d'une suite soit an^p, a étant un coefficient connu, n le nombre des termes, et p un nombre entier et positif : la suite sera

$$a\,1^p + a\,2^p + a\,3^p + a4^p + \ldots\ldots + an^p.$$

Puisque chaque terme doit se déduire du terme général en y faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 4$, etc. la somme sera donc

$$a\{1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots\ldots + n^p\} = a\,S_p\,;$$

mais on peut, au moyen de la formule (R), évaluer S_p ; on aura donc résolu la question.

Si le terme général était $an^p + bn^q$, chaque terme de la suite à laquelle il appartiendrait, se composerait de la somme des termes de même rang dans les deux suites qui auraient chacune pour terme général an^p et bn^q : or la somme des termes de la première suite est aS_p, et celle des termes de la seconde est bS_q ; donc la somme des termes de la série proposée serait $aS_p + bS_q$.

On voit, en général, que si le terme général d'une série est

$$an^p + bn^q + cn^r + \text{etc.}$$

la somme des termes de cette série sera

$$aS_p + bS_q + cS_r + \text{etc.}$$

Soit, pour exemple, la suite des nombres naturels

$$1,2,3,4,5\ldots\ldots\ldots n,$$

le terme général étant $=n$, la somme de tous les termes sera $=S$; mais ici $a=\delta=1$, et la formule (1°) donne

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit la suite

$$1,\ 3,\ 6,\ 10\ldots\ldots\frac{n(n+1)}{2},$$

puisqu'on a pour expression du terme général

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

la somme sera

$$\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{2}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{2n^3+6n^2+4n}{1.2.3}\right\}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Soit, pour dernier exemple, la suite

$$1,\ 4,\ 10,\ 20\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

dont le terme général est

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\tfrac{1}{6}n^3+\tfrac{3}{6}n^2+\tfrac{2}{6}n,$$

on trouvera pour la somme d'un nombre n de ces termes

$$\frac{S_3}{6}+\frac{3S_2}{2}+\frac{2S_1}{6}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{2.4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

On voit donc que la somme d'un nombre n de termes de

chacune de ces suites est le terme général de la série suivante, ensorte que les termes de celle-ci sont les sommes successives d'autant de termes de la série précédente qu'il y a d'unités dans l'indice du terme *sommatoire*.

94. Cherchons actuellement le nombre des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une progression arithmétique, pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

Soit la progression arithmétique

$$a+h.a+2h.a+3h.a+4h\ldots\ldots\ldots a+(m-1)h.$$

Si on forme une équation dont les racines soient

$$-(a+h),-(a+2h),-(a+3h),\text{ etc.}\ldots-\{a+(m-1)h\},$$

et qu'on en désigne les coefficiens successifs par A', A'', A''', $\ldots\ldots A^{(m-1)}$, on aura l'identité

$$x^{m-1}+A'x^{m-2}+A''x^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+A^{(m-1)}=$$
$$(x+a+h)(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\{x+a+(m-1)h\}\ldots\ldots(1)$$

dans laquelle A', $A''\ldots\ldots A^{(m-1)}$ seront les produits qu'il s'agit d'évaluer. L'identité précédente en y écrivant $x+h$ pour x, deviendra

$$(x+h)^{m-1}+A'(x+h)^{m-2}+A''(x+h)^{m-3}+\ldots\ldots=$$
$$=(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots\ldots(x+a+mh)\ldots\ldots(2).$$

Si on multiplie (1) par $x+a+mh$ et (2) par $x+a+h$, on aura l'identité

$$(x+a+mh)\{x^{m-1}+A'x^{m-2}+A''x^{m-3}+\ldots\ldots+A^{(m-1)}\}$$
$$=(x+a+h)\{(x+h)^{m-1}+A'(x+h)^{m-2}$$
$$+A''(x+h)^{m-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+A^{(m-1)}\}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\left.\begin{matrix} x^m + A' \\ + a \\ + mh \end{matrix}\right\} x^{m-1} \left.\begin{matrix} + A'' \\ + A'a \\ + A'mh \end{matrix}\right\} x^{m-2} \left.\begin{matrix} + A''' \\ + A''a \\ + A''mh \end{matrix}\right\} x^{m-3}$$

$$\ldots\ldots \left.\begin{matrix} + A^{(m-1)} \\ + A^{(m-2)}a \\ + A^{(m-2)}mh \end{matrix}\right\} x + A^{(m-1)}(a+mh)$$

$$= x^m \left.\begin{matrix} + mh \\ + A' \\ + a \end{matrix}\right\} x^{m-1} \left.\begin{matrix} + \frac{m.m-1}{2} h^2 \\ + [(m-1)(A'+a)]h \\ + A'' + A'a \end{matrix}\right\} x^{m-2}$$

$$\left.\begin{matrix} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} h^3 \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2}(A'+a)h^2 \\ + (m-2)(A''+A'a)h \\ + A''' + A''a \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\} x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{matrix} + h^m \\ + (A'+a)h^{m-1} \\ + (A''+aA')h^{m-2} \\ + (A'''+aA'')h^{m-3} \\ \text{etc.} \end{matrix}$$

Comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on obtient les équations

$$A' + a + mh = A' + a + mh$$

$$A'' + A'a + A'mh = \frac{m(m-1)}{1.2}h^2 + (m-1)A'h + (m-1)ah + A'' + A'a$$

$$A''' + A''a + A''mh = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}h^3 + (A'+a)\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}h^2$$

$$+ (A'' + A'a)(m-2)h + A''' + A''a$$

etc. etc.

dont la première ne fait rien connaître : on déduit des suivantes

$$A' = (m-1)a + \frac{m(m-1)}{1.2}h$$

$$2A'' = (m-2)A'a + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(A'+a)h + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}h^2$$

$$3A''' = (m-3)A''a + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}(A''+A'a) +$$

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(A'+a)h^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}h^3$$

etc. etc.

Si on fait $a = 0$ et $h = 1$, les équations précédentes donneront les produits un à un, deux à deux, trois à trois, etc. des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $m-1$, et on aura

$$A' = \frac{(m-1)(m-1)}{1.2}$$

$$2A'' = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A' + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

$$3A''' = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}A'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

$$4A^{\text{IV}} = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}A''' + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}A'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}A' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5};$$

résultats dont la loi est facile à saisir.

Si dans la progression arithmétique dont on est parti, on suppose

$$a + h = a', \text{ d'où } a = a' - h;$$

et si de plus on change $m-1$ en m', on aura pour nouvelle progression

$$a'.a'+h.a'+2h.a'+3h\ldots\ldots\ldots\ldots a'+(m'-1)h,$$

ensorte que faisant les substitutions ci-dessus dans la première valeur de A'', on trouvera, après avoir remplacé A' par $m'(a'-h)+\frac{(m'-1)(m'-2)}{1.2}h$, et fait les réductions qui ne présentent pas de difficultés,

$$A''=\frac{m'(m'-1)}{2}\left[a'^2+(m'-1)a'h+(m'-2)(3m'-1)\frac{h^2}{12}\right].$$

95. Qu'on suppose maintenant une équation

$$x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}+A'''x^{m-3}+\text{etc.}=0,$$

dont les m racines forment la progression arithmétique

$$a.a+h.a+2h\ldots\ldots\ldots\ldots a+(m-1)h,$$

les coefficiens A', A'' seront des fonctions des racines, telles que

$$A'=-\frac{m}{2}[2a+(m-1)h]$$

$$A''=\frac{m(m-1)}{2}\left[a^2+(m-1)ah+(m-2)(3m-1)\frac{h^2}{12}\right].$$

De ces deux équations on déduira

$$h=\frac{2}{m}\sqrt{\left[\frac{3(m-1)A'^2-2mA''}{m^2-1}\right]}$$

$$a=-\frac{1}{m}\left[A'+(m-1)\sqrt{\left\{\frac{3[(m-1)A'^2-2mA'']}{m^2-1}\right\}}\right].$$

Connaissant ainsi le premier terme et la raison, on pourra former tous les termes de la progression, c'est-à-dire, toutes les racines de la proposée. Posant, pour abréger,

Digitized by Google

$$\sqrt{\left\{\frac{3[(m-1).A'^2-2mA'']}{m^2-1}\right\}}=k,$$

on aura pour les m racines, dans le cas de m nombre pair,

$$x=-\frac{1}{m}(A'+(m-1)k)$$

$$x=-\frac{1}{m}(A'+(m-3)k)$$

. . . .

$$x=-\frac{1}{m}(A'+k)$$

$$x=-\frac{1}{m}(A'-k)$$

. . . .

$$x=-\frac{1}{m}(A'-(m-3)k)$$

$$x=-\frac{1}{m}(A'-(m-1)k).$$

Dans le cas de m nombre impair, les $\frac{m-3}{2}$ premières, et les $\frac{m-3}{2}$ dernières valeurs de x étant les mêmes que ci-dessus, nous n'écrirons que les trois valeurs moyennes qui sont

$$x=-\frac{1}{m}(A'+2k)$$

$$x=-\frac{A'}{m}$$

$$x=-\frac{1}{m}(A'-2k).$$

Faisons quelques applications de la théorie précédente, et prenons d'abord l'équation

$$x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 50x - 56 = 0,$$

pour laquelle on a

$$m = 4, A' = 10, A'' = 15,$$

d'où résultent

$$h = 3, a = -7;$$

ensorte que les racines sont $-7, -4, -1, +2$, progression par équidifférences.

L'équation

$$x^6 - 6x^5 + 85x^4 - 300x^3 + 1471x^2 - 2358x + 2907 = 0$$

donne

$$m = 6, A' = -6, A'' = 85,$$

d'où résultent

$$h = 2\sqrt{-2}; \quad a = 1 - 5\sqrt{2};$$

les racines forment donc la progression arithmétique

$$1-5\sqrt{-2},\ 1-3\sqrt{-2},\ 1-\sqrt{-2},\ 1+\sqrt{-2},\ 1+3\sqrt{-2},\ 1+5\sqrt{-2}.$$

On trouvera de plus amples détails sur cette matière dans les Elémens d'Algèbre de *Dubourguet*.

CHAPITRE XX.

Des suites récurrentes.

96. On a vu (1ʳᵉ sect. nº 239) qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+px^{m-1}}{1-a'x-b'x^2-c'x^3-\ldots\ldots\ldots\ldots-q'x^m}$$

engendrait une suite dans laquelle le coefficient d'un terme quelconque, à partir du m^{eme}, dépendait de ceux des m termes précédens, suivant une loi constante déterminée par le dénominateur de la fraction développée. Cette relation qui existe toujours entre un même nombre de termes consécutifs, a fait appeler ces suites *récurrentes*, et les quantités

$$q' \ldots\ldots c', \ b', \ a',$$

par lesquelles il faut multiplier les coefficiens des termes qui précèdent celui qu'on cherche, portent ensemble le nom d'*échelle de relation*.

97. On a déjà traité (nº ci-dessus) le problème suivant : *Étant donnée la fraction rationnelle, trouver la suite qui provient de son développement.* Il reste encore, pour terminer ce que nous avons à dire sur cette matière, à résoudre les questions suivantes :

1°. *Étant donnée la suite récurrente et l'échelle de relation, trouver la fraction rationnelle génératrice, et la somme d'un nombre quelconque de termes d'une telle suite.*

2°. *Déterminer l'expression d'un terme quelconque, indépendamment de ceux qui le précèdent, ou le terme général.*

L'échelle de relation étant donnée, le dénominateur de la fraction génératrice est connu ; il n'y a plus, pour résoudre la première question, que le numérateur à déterminer.

Soit donc proposée la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

dont l'échelle de relation soit

$$a', -b', +c', -d',$$

le dénominateur de la fraction génératrice sera

$$1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4.$$

Soit $a + bx + cx^2 + dx^3$ le numérateur : les coefficiens a, b, c, d doivent être tels que la proposée résulte du développement de la fraction

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}.$$

Il faudra donc que l'identité

$$a + bx + cx^2 + dx^3 =$$

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})\,(1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4)$$

ait lieu quel que soit x ; ce qui donne, en développant et comparant les coefficiens des mêmes puissances de x,

$$\begin{aligned} a &= A \\ b &= B - a'A \\ c &= C - a'B + b'A \\ d &= D - a'C + b'B - c'A, \end{aligned}$$

etc.

Donc la fraction génératrice demandée sera

$$\frac{A+(B-a'A)x+(C-a'B+b'A)x^2+(D-a'C+b'B-c'A)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}$$

Il est facile de comprendre maintenant comment on trouve la somme d'une suite récurrente continuée jusqu'à un terme donné. En effet, supposons qu'il soit question de trouver la somme de la série proposée jusqu'au terme Px^n inclusivement, et faisons

$$S=A+Bx+Cx^2+\text{etc}......+Px^n:$$

comme la somme de cette série prolongée à l'infini est connue, cherchons celle des termes qui suivent le dernier Px^n à l'infini, que nous supposerons

$$S'=Qx^{n+1}+Rx^{n+2}+Sx^{n+3}+Tx^{n+4}+\text{etc.};$$

cette série, divisée par x^{n+1}, donne une série récurrente parfaitement conforme à la première, dont la somme sera

$$S'=\frac{Qx^{n+1}+(R-a'Q)x^{n+2}+(S-a'R+b'Q)x^{n+3}+(T-a'S+b'R-c'Q)x^{n+4}}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4};$$

donc la somme cherchée

$$S=\frac{A+(B-a'A)x+(C-a'B+b'A)x^2+(D-a'C+b'B-c'A)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}$$

$$-\frac{[Qx^{n+1}+(R-a'Q)x^{n+2}+(S-a'R+b'Q)x^{n+3}+(T-a'S+b'R-c'Q)x^{n+4}]}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}.$$

On opérerait de la même manière pour trouver la fraction génératrice, dans le cas où l'échelle de relation serait composée d'un plus grand nombre de termes.

Soit, pour exemple, la série

$$1+8x+27x^2+64x^3+125x^4+\text{etc.}$$

dont l'échelle de relation est

$$4, -6, +4, -1,$$

le dénominateur sera

$$1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1-x)^4,$$

et on trouvera

$$a = 1$$
$$b = -4 + 8 = 4$$
$$c = 6 - 32 + 27 = 1$$
$$d = 64 - 108 + 48 - 4 = 0,$$

et par conséquent $1 + 4x + x^2$ pour le numérateur. La fraction rationnelle génératrice sera donc

$$\frac{1 + 4x + x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4} = \frac{1 + 4x + x^2}{(1-x)^4}.$$

Soit, pour second exemple, la série

$$1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 - \text{etc.}$$

dont l'échelle de relation est

$$-1, +6,$$

le dénominateur de la fraction sera

$$1 + x - 6x^2,$$

on trouvera ensuite

$$a = 1, b = -5, c = 0;$$

donc

$$\frac{1 - 5x}{1 + x - 6x^2}$$

représentera la fraction dont la série proposée est le développement, et

$$\frac{1-5x+408x^5-720x^6}{1+x-6x^2}$$

sera la somme des cinq premiers termes de cette série.

98. Occupons-nous maintenant de la recherche du terme général, et considérons d'abord la fraction rationnelle la plus simple

$$\frac{A}{1-rz}.$$

La série résultante de son développement est

$$A(1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r^nx^n)$$

dont le terme général est Ar^nx^n. On appelle ainsi cette expression, parce qu'en y mettant successivement tous les nombres entiers et positifs au lieu de n, on obtient tous les termes de la série.

Si la fraction rationnelle génératrice avait pour dénominateur un polynome d'un degré plus élevé que le premier, et qu'on pût, par un moyen quelconque, la décomposer en une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{1-rx};\ \frac{A'}{1-r'x};\ \frac{A''}{1-r''x},\ \text{etc.}$$

il serait facile d'obtenir le terme général de la série résultante du développement de la fraction proposée, parce que ce terme général serait la somme des termes généraux des séries que donneraient les fractions simples. En effet, soient

$$A\ (1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r^nx^n+\text{etc.})$$
$$A'\ (1+r'x+r'^2x^2+r'^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r'^nx^n+\text{etc.})$$
$$A''\ (1+r''x+r''^2x^2+r''^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r''^nx^n+\text{etc.})$$
$$A'''(1+r'''x+r'''^2x^2+r'''^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r'''^nx^n+\text{etc.})$$

les séries récurrentes qui naissent de chacune des fractions simples, et

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots+Rx^n+\text{etc.}$$

le développement de la fraction proposée; comme on aurait, par l'hypothèse, l'équation identique

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+px^{m-1}}{1-a'x-b'x^2\ldots-q'x^m}=\frac{A}{1-rx}+\frac{A'}{1-r'x}+\frac{A''}{1-r''x}+\text{etc.}$$

la suivante

$$\left.\begin{matrix}+A+Ar\\ +A'+A'r'\\ +A''+A''r''\end{matrix}\right\} x+\ldots\ldots\ldots\ldots\left.\begin{matrix}+Ar^n\\ +A'r'^n\\ +A''r''^n\end{matrix}\right\} x^n+\text{etc.}=$$
$$+\text{etc.}$$

$$A+Bx+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+Rx^n+\text{etc.}$$

aurait lieu aussi : ce qui donne

$$R=Ar^n+A'r'^n+A''r''^n+\text{etc.}$$

La difficulté se réduit donc à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots\ldots+px^{m-1}}{1-a'x-b'x^2-c'x^3-\ldots\ldots\ldots-q'x^m}$$

en une suite de fractions de la forme

$$\frac{A}{1-rx}+\frac{A'}{1-r'x}+\frac{A''}{1-r''x}+\text{etc.};$$

les quantités A, A', A'', etc. r, r', r'', etc. devant être déterminées par la condition qu'en réunissant les fractions simples en une seule, les deux termes de la fraction réduite soient les mêmes que ceux de la fraction proposée. Cette décomposition sera la matière du chapitre suivant.

Puisque les dénominateurs des fractions simples, multipliés

entre eux, doivent reproduire le dénominateur de la fraction proposée, on déterminera ces facteurs en égalant à zéro le dénominateur

$$1 - a'x - b'x^2 - \ldots\ldots - q'x^m,$$

et cherchant ensuite, d'après les méthodes précédemment exposées, les racines de cette équation. Reste donc à évaluer les numérateurs A, A', A'', etc. : or ces quantités devant etre telles que le numérateur de la fraction réduite soit le même que celui de la fraction proposée, on égalera entre eux les coefficiens des mêmes puissances de x, ce qui fournira un nombre m d'équations du premier degré, au moyen desquelles on calculera les indéterminées A, A', A'', qui sont aussi en nombre m.

Soient les fractions

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2} \text{ et } \frac{1-x}{1-5x+6x^2}:$$

on trouvera que la première se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x},$$

et la seconde dans celles-ci

$$\frac{-1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}.$$

Il est facile maintenant de trouver les termes généraux des séries que donnent les fractions précédentes. Pour la première, on ferait la somme des termes généraux des séries données par les fractions

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x} \text{ et } \frac{\frac{1}{3}}{1-2x},$$

et on trouverait

$$[\tfrac{2}{3}(-1)^n + \tfrac{1}{3}.\, 2^n]\, x^n = \frac{2^n \pm 2}{3}\, x^n,$$

les signes + et — ayant respectivement lieu pour n pair et impair. Faisant successivement

$$n=0, =1, =2, =3, \text{ etc.}$$

on aura la série

$$1+0x+2x^2+2x^3+6x^4+10x^5+22x^6+42x^7+\text{etc.}$$

Le terme général de la seconde fraction sera

$$2.3^n.x^n-2^n.x^n=(2.3^n-2^n)x^n,$$

et posant successivement $n=0, =1, =2$, etc. on aura la série

$$1+4x+14x^2+46x^3+146x^4+\text{etc.}$$

Prenons encore pour exemple la fraction

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2}:$$

les facteurs du dénominateur étant

$$1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x \text{ et } 1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x,$$

on aura les fractions partielles

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x},$$

lesquelles donnent, pour le terme général de la série proposée,

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n,$$

d'où l'on déduirait le développement en série de la proposée.

99. Les développemens en séries des fractions

$$\frac{1}{(1-rx)^2};\ \frac{1}{(1-rx)^3};\ \frac{1}{(1-rx)^4}\text{ etc.}$$

donnent pour termes généraux

$$(m+1)r^m x^m;\ \frac{(m+1)(m+2)}{2}r^m x^m;\ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3}r^m x^m,\text{ etc.}$$

donc la somme de la suite qui aura pour terme général

$$\left\{K+(m+1)K_1+\frac{(m+1)(m+2)K_2}{2}+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)K_3}{1.2.3}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\frac{+(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+\mu-1)K_{\mu-1}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu-1)}\right\}r^m x^m$$

sera égale à

$$\frac{K}{1-rx}+\frac{K_1}{(1-rx)^2}+\frac{K_2}{(1-rx)^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{K_{\mu-1}}{(1-rx)^{\mu}},$$

c'est-à-dire à la fraction simple

$$\frac{K(1-rx)^{\mu-1}+K_1(1-rx)^{\mu-2}+K_2(1-rx)^{\mu-3}+\ldots\ldots\ldots+K_{\mu-1}}{(1-rx)^{\mu}}.$$

D'où il suit que si l'on a une série dont le terme général soit représenté par la formule

$$(K+K'm+K''m^2+K'''m^3+\ldots\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}m^{\mu-1})r^m x^m,$$

il n'y aura qu'à déterminer les coefficiens K_1, K_2, $K_3\ldots\ldots$ $K_{\mu-1}$ de manière qu'on ait l'équation identique

$$K+K'm+K''m^2+K'''m^3+\ldots\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}m^{\mu-1}=$$

$$K+K_1(m+1)+\frac{K_2(m+1)(m+2)}{1.2}+\frac{K_3(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{K_{\mu-1}(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots\ldots(m+\mu-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu-1)}.$$

Qu'on suppose à cet effet

$$K+K'm+K''m^2+K'''m^3+\ldots\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}m^{\mu-1}=S,$$

et qu'on dénote par S', S'', S''', etc. les valeurs de S, lorsque $m=-1$, $=-2$, $=-3$, etc. on aura, d'après l'identité précédente,

$$\left.\begin{array}{l} S'=K \\ S''=K-K_1 \\ S'''=K-2K_1+K_2 \\ S^{\text{IV}}=K-3K_1+3K_2-K_3 \\ \quad\text{etc.}\end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l} K=S' \\ K_1=S'-S'' \\ K_2=S'-2S''+S''' \\ K_3=S'-3S''+3S'''-S^{\text{IV}} \\ \quad\text{etc.}\end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans la fraction ci-dessus, on aura la fraction génératrice cherchée, dont l'échelle de relation sera

$$\mu r, -\frac{\mu(\mu-1)}{2}r^2, \quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}r^3, \text{etc.}\ldots\ldots\pm r^{\mu}.$$

Enfin, il est clair que si la suite proposée est composée de plusieurs suites de la forme précédente, il ny aura qu'à ajouter ensemble les fractions qui expriment la somme de chacune de ces suites, et l'on aura une fraction unique, égale à la série proposée, et dont le dénominateur sera de la forme $(1-rx)^{\mu}$ $(1-px)^{\nu}\ldots\ldots$ De sorte que cette série aura pour échelle les coefficiens, pris négativement, des puissances x, x^2, x^3, etc.

du polynome qui résultera du développement de la formule $(1-rx)^{\mu}(1-px)^{\nu}$.........

100. Nous terminerons la doctrine des suites récurrentes par la question suivante :

3° *Étant donnée une suite de termes dont les valeurs sont connues, trouver si cette suite est récurrente, et déterminer, dans ce cas, la formule générale de ses termes.*

Soient les termes donnés et connus T, T', T'', T''', etc. on en formera la série

$$T+T'x+T''x^2+T'''x^3+T^{\text{IV}}x^4+\text{etc.}$$

qu'on supposera $=S$, et il s'agira de chercher si elle peut résulter du développement d'une fonction rationnelle quelconque, où la plus haute puissance de x dans le numérateur, soit moindre que dans le dénominateur.

Supposons d'abord que la série proposée soit le développement de $\frac{a'}{a+bx}$, ou qu'on ait

$$S=\frac{a'}{a+bx}\,;\ \text{donc}\ \frac{1}{S}=\frac{a+bx}{a'}=p+qx,$$

d'où il suit que si l'on divise l'unité par le polynome S, en ordonnant, dans l'opération, les termes suivant les puissances de x, on trouvera nécessairement, dans l'hypothèse actuelle un quotient fini, composé de deux termes $p+qx$.

Si cette condition n'a pas lieu, la série proposée ne sera pas le développement de $\frac{a'}{a+bx}$, et il faudra rechercher si l'on n'a pas

$$S=\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2},\ \text{d'où}\ \frac{1}{S}=\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x},$$

après deux divisions partielles, on aura un quotient $p+qx$ avec un reste de la forme $a''x^2$; donc

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{a''x^2}{a'+b'x},$$

d'où l'on conclura que si l'on divise l'unité par le polynome S, et qu'on pousse la division jusqu'à ce qu'on ait dans le quotient, deux termes tels que $p+qx$, on aura un reste qui sera nécessairement divisible par x^2, et qu'on pourra représenter par $S'x^2$, S' étant une nouvelle série de la forme

$$V'+V''x+V'''x^2+V''''x^3 \text{ etc.};$$

donc

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'x^2}{S}=p+qx+\frac{a''x^2}{a'+b'x},$$

conséquemment

$$\frac{S'}{S}=\frac{a''}{a'+b'x}, \text{ d'où } \frac{S}{S'}=\frac{a'+b'x}{a''}=p'+q'x.$$

Donc si l'on divise le polynome S par le polynome S', on aura, dans l'hypothèse actuelle, un quotient fini de deux termes tels que $p'+q'x$. Des deux équations obtenues précédemment

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'x^2}{S};\quad \frac{S}{S'}=p'+q'x,$$

on déduit

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{x^2}{p'+q'x}}=\frac{p'+q'x}{(p+qx)(p'+q'x)+x^2}$$

fraction génératrice.

Supposons encore que la condition

$$\frac{S}{S'}=p'+q'x$$

ne soit pas satisfaite ; on recherchera si la série proposée a pour somme

$$S=\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}; \text{ donc } \frac{1}{S}=\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{a'+b'x+c'x^2}.$$

Qu'on divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur, on aura, après deux divisons partielles, un quotient de la forme $p+qx$, et un reste tel que $a''x^2+b''x^3$;

donc $$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{a''x^2+b''x^3}{a'+b'x+c'x^2}.$$

Il suit de là que si l'on divise l'unité par le polynome S, et qu'on continue la division jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux termes tels que $p+qx$, le reste sera en total divisible par x^2, et pourra être représenté par $S'x^2$, S' étant encore une série de la forme

$$V+V'x+V''x^2+V'''x^3+V^{\text{IV}}x^4+\text{etc.}$$

on aura donc

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'x^2}{S}=p+qx+\frac{a''x^2+b''x^3}{a'+b'x+c'x^2};$$

donc $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{a''+b''x}{a'+b'x+c'x^2}$, et de là $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{a'+b'x+c'x^2}{a''+b''x}$.

Or en divisant le numérateur de cette fraction par le dénominateur, il est clair qu'après deux divisions partielles, on aura

$$\frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{a'''x^2}{a''+b''x};$$

donc si l'on divise le polynome S par le polynome S', et qu'on

pousse la division jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes tels que $p'+q'x$, le reste sera nécessairement divisible par x^2, et pourra être représenté par $S''x^2$, S'' étant une nouvelle série de la forme

$$X+X'x+X''x^2+X'''x^3+\text{etc.}$$

On aura donc

$$\frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{S''x^2}{S'}=p'+q'x+\frac{a''x^2}{a''+b''x},$$

d'où

$$\frac{S''}{S'}=\frac{a''}{a''+b''x}, \text{ et de là } \frac{S'}{S''}=\frac{a''+b''x}{a''}=p''+q''x.$$

Ainsi, dans l'hypothèse présente, en divisant le polynome S' par le polynome S'', on aura un quotient fini tel que $p''+q''x$. Au moyen des équations

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'x^2}{S};\ \frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{S''x^2}{S'};\ \frac{S'}{S''}=p''+q''x,$$

on trouve

$$S=\frac{(p'+q'x)\,(p''+q''x)+x^2}{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+[(p+qx)+(p''+q''x)]x^2},$$

fraction génératrice de la série proposée.

101. On conclura donc, en général, *que pour reconnaître si la série proposée S est récurrente, il n'y a qu'à diviser l'unité par S, jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes tels que* p + qx, *et dénotant le reste par* S'x², *on divisera* S *par* S' *jusqu'à ce que l'on ait aussi au quotient deux termes tels que* p' + q'x; *dénotant de même le reste par* S''x², *on divisera encore* S' *par* S'' *jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes* p'' + q''x, *et ainsi de suite. Si la série est véritable-ment*

ment récurrente, l'opération se terminera nécessairement à la n^{eme} division, ensorte que le reste $S^{(n)}x^2$ sera nul. Autrement l'opération ira à l'infini.

On demande si la suite des nombres

1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65, etc.

dont on ignore la loi, est une suite récurrente.

Ayant formé la série

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7 + 31x^8 + 17x^9 + 63x^{10} + 33x^{11} + 127x^{12} + 65x^{13} + \text{etc.}$$

on divisera l'unité par S, ce qui donnera le quotient

$$p + qx = 1 - 2x,$$

et le reste $x^2 + 3x^3 - x^4 + \text{etc.}$ entièrement divisible par x^2. Cette division faite, on trouvera

$$S' = 1 + 3x - x^2 + 9x^3 - 5x^4 + 21x^5 - 13x^6 + 45x^7 - 29x^8 + 93x^9 - 61x^{10} + 18x^{11}, \text{ etc.}$$

et divisant S par S', il viendra pour quotient

$$p' + q'x = 1 - x,$$

et pour reste $7x^2 - 7x^3 + 21x^4 + \text{etc.}$, lequel étant divisé par x^2, donnera la série

$$S'' = 7 - 7x + 21x^2 - 21x^3 + 49x^4 - 49x^5 + 105x^6 - 105x^7 + 217x^8 - 217x^9, \text{ etc.}$$

Divisant S' par S'', viendra le quotient

$$p'' + q''x = \frac{1}{7} + \frac{4x}{7}$$

avec un reste nul, ce qui démontre que la suite proposée est

effectivement récurrente. Les valeurs numériques de p, q; p', q'; p'', q'' substituées dans la formule générale S, correspondante à ce cas, donnent pour fraction génératrice

$$S = \frac{1 - 3x + 3x^2}{1 + x - 2x^2 - 2x^3},$$

dont l'échelle de relation est -1, $+2$, $+2$, ensorte que si t, t', t'', t''' sont quatre termes consécutifs quelconques de la série proposée, on aura

$$t''' = -t'' + 2t' + 2t.$$

Pour trouver l'expression du terme général, on prendra les facteurs du dénominateur, qui sont

$$1 + x,\ 1 + x\sqrt{2},\ 1 - x\sqrt{2},$$

et on aura, d'après le chapitre suivant,

$$S = -\frac{1}{1+x} + \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + x\sqrt{2}} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - x\sqrt{2}},$$

d'où l'on déduira le terme général

$$\left[-1(\sqrt{-1})^m + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2})^m + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})^m\right]x^m.$$

On trouverait exactement de la même manière que la série des nombres

1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, etc.

est une série récurrente dont la fraction génératrice est

$$S = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4},$$

d'où résulte l'échelle de relation 3, -4, 3, -1. Le dénomi-

nateur se résout dans les facteurs $(1-x)^2$, $1-x+x^2$, dont le dernier se décompose dans les deux suivans :

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)x\,;\;1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)x,$$

ou

$$1-\left(\cos\frac{2.100^d}{3}+\sin\frac{2.100^d}{3}\sqrt{-1}\right)x\,;\;1-\left(\cos\frac{2.100^d}{3}-\sin\frac{2.100^d}{3}\sqrt{-1}\right)x$$

auxquels on peut encore substituer les suivans :

$$1-e^{\frac{2.100^d}{3}\sqrt{-1}}x,\;1-e^{-\frac{2.100^d}{3}\sqrt{-1}}x,$$

ensorte que, comme on le verra (nos 103 et 104), la fraction génératrice pourra être décomposée dans les quatre suivantes :

$$\frac{A}{1-e^{\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}x}+\frac{A'}{1-e^{-\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{B'}{1-x},$$

et l'on trouvera

$$B=1\,,\quad B'=-1$$

$$A=\frac{e^{\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}-1}{e^{\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}}$$

$$=e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}\times\frac{e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{100}{3}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}}$$

$$=e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}\times\frac{e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{100}{3}\sqrt{-1}}}{\left(e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{100}{3}\sqrt{-1}}\right)\left(e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{100}{3}\sqrt{-1}}\right)}$$

$$=e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}\times\frac{1}{e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{100}{3}\sqrt{-1}}}=\frac{e^{\frac{100}{3}\sqrt{-1}}}{2\cos\frac{100}{3}},$$

et de même

$$A' = \frac{e^{-\frac{100^d}{3}\sqrt{-1}}}{2\cos\frac{100^d}{3}}.$$

On aura donc pour terme général

$$\left[B' + (m+1)B + Ae^{m.\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}} + A'e^{-m\frac{2.100}{3}\sqrt{-1}}\right]x^m,$$

qui, par la substitution des valeurs de A, A', B, B', devient

$$\left(m + \frac{\cos\left(\frac{100^d}{3} + m\frac{2.100^d}{3}\right)}{\cos\frac{100^d}{3}}\right)x^m.$$

102. Des équations trouvées précédemment

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S}$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''x^2}{S'}$$

$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x + \frac{S'''x^2}{S''}$$

$$\frac{S''}{S'''} = p''' + q'''x + \frac{S^{\text{IV}}x^2}{S'''},$$

etc.

$$\frac{S^{(n-2)}}{S^{(n-1)}} = p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x^2,$$

on déduit

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{S'}{S}x^2}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2}.$$

$$\frac{S''}{S'} = \frac{1}{p'' + q''x + \frac{S'''}{S''}x^2},$$

etc.

$$\frac{S^{(n-1)}}{S^{(n-2)}} = \frac{1}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x^2};$$

donc

$$S = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{x^2}{p' + q'x + \cfrac{x^2}{p'' + q''x + \cfrac{x^2}{p''' + q'''x + \text{etc.} \; + \cfrac{x^2}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x}}}}}$$

Ainsi, pour repasser à la fraction génératrice, il n'y aurait plus qu'à réduire cette fraction continue en une fraction ordinaire. Voyez pour de plus amples détails sur ce chapitre un mémoire de *Lagrange*, intitulé : *Recherches sur la manière de former des tables des planètes, d'après les seules observations* (*vol.* 1772 *de l'Académie des Sciences de Paris*, 1re *partie.*).

CHAPITRE XXI.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

103. **O**N a vu (n° 98) que la recherche du terme général d'une suite récurrente ne présentait plus de difficultés lorsque la fraction rationnelle génératrice était décomposée en fractions simples. Cette décomposition étant aussi d'un usage fréquent dans le *calcul intégral*, il ne sera pas inutile d'exposer les méthodes les plus simples pour l'effectuer.

Pour opérer cette décomposition, il faut,

1°. Que le numérateur N soit d'une dimension moindre au

moins d'une unité que le dénominateur D, ce qu'on peut toujours obtenir par la division;

2°. Qu'on ait, par les méthodes précédemment exposées, trouvé les facteurs simples du dénominateur, ou les racines de ce dénominateur égalé à zéro.

Soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots\ldots+a^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots\ldots(x-\alpha^{(n-1)})},$$

α, $\alpha'\ldots\ldots\alpha^{(n-1)}$ étant des racines réelles ou imaginaires, ce qui ne contrarie pas la généralité des résultats. On pourra supposer

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{A'}{x-\alpha'}+\ldots\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{x-\alpha^{(n-1)}},$$

$A, A'\ldots A^{(n-1)}$ étant des coefficiens constans et indéterminés, fonctions de a, $a'\ldots a^{(n-1)}$, α, $\alpha'\ldots\alpha^{(n-1)}$. En effet, si on réduit toutes ces fractions au même dénominateur, qu'on en fasse la somme, ce qui fournit le moyen de faire disparaître le dénominateur D, et qu'on compare les coefficiens des mêmes puissances de x, on aura un nombre n d'équations entre les n indéterminées A, $A'\ldots\ldots A^{(n-1)}$, d'où résulte la possibilité de les évaluer toutes, et la légitimité de l'hypothèse précédente.

Soit, pour exemple, la fraction

$$\frac{1+x^2}{x-x^3},$$

dont les facteurs simples du dénominateur sont x, $1-x$, $1+x$. On posera donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{1-x}+\frac{A''}{1+x},$$

d'où on déduit l'identité

$$1+x^2=A+(A'+A'')x+(-A+A'-A'')x^2;$$

et comparant les coefficiens des memes puissances de x, il vient

$$A = 1,\ A' = 1,\ A'' = -1;$$

donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

104. Lorsque les facteurs du dénominateur seront inégaux entre eux, on pourra toujours, par la méthode précédente, déterminer les numérateurs des fractions simples; mais le calcul qu'elle exige devient d'autant plus long, que le degré du dénominateur est plus élevé. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de deduire immédiatement de N et de D, l'un quelconque des numérateurs $A, A' \ldots A^{(n-1)}$, sans faire dépendre sa valeur de celles des dénominateurs précédens, comme il arrive dans la méthode que nous venons d'exposer.

Soit $x - \alpha$ un des facteurs de D, ensorte que

$$D = (x - \alpha)\,S,$$

S étant le produit des autres dénominateurs $x - \alpha' \ldots\ldots$ $x - \alpha^{(n-1)}$: si l'on représente par $\frac{P}{S}$ la somme des fractions partielles, moins la fraction $\frac{A}{x-\alpha}$, on aura l'identité

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{P}{S} = \frac{AS + P(x-\alpha)}{S(x-\alpha)} = \frac{AS + P(x-\alpha)}{D},$$

donc

$$N - AS = P(x - \alpha).$$

Le numérateur A doit donc être tel que $N - AS$ soit exactement divisible par $x - \alpha$, puisque P est une fonction entière de x; ce qui exige que la fonction $N - AS$ s'évanouisse pour $x = \alpha$. Cette condition sera satisfaite en prenant

$$A = \frac{(N)}{(S)},$$

(N) et (S) étant ce que deviennent N et S lorsqu'on fait $x = \alpha$; d'où nous conclurons cette règle : *Pour déterminer un des numérateurs, il faudra dans* N *et* S, *écrire pour* x *la racine du facteur simple qui sert de dénominateur à la fraction partielle sur laquelle on opère.*

On a donc

$$A = \frac{a + a'\alpha + a''\alpha^2 + a'''\alpha^3 + \text{etc.}}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')\ \text{etc.}}$$

$$A' = \frac{a + a'\alpha' + a''\alpha'^2 + a'''\alpha'^3 + \text{etc.}}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')(\alpha' - \alpha''')\ \text{etc.}}$$

$$A'' = \frac{a + a'\alpha'' + a''\alpha''^2 + a'''\alpha''^3 + \text{etc.}}{(\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')(\alpha'' - \alpha''')\ \text{etc.}}$$

etc.

Si dans l'exemple précédent $\frac{1+x^2}{x-x^3}$, ou $N = 1 + x^2$, et $D = x - x^3$, on prend x pour le facteur simple correspondant à A, on aura

$$S = 1 - x^2,$$

et le numérateur A de la fraction simple $\frac{A}{x}$, sera ce que devient $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ pour $x = 0$; ce qui donne

$$A = 1.$$

Prenant ensuite le facteur simple $1 - x$, pour lequel $S = x + x^2$, on aura $A' = \frac{1+x^2}{x+x^2}$, ce qui donne pour $x = 1$,

$$A' = 1.$$

Enfin, pour le troisième facteur simple $1 + x$, à cause de

$S = x - x^2$, on fera $x = -1$ dans $\frac{1+x^2}{x-x^2}$, ce qui donne

$$A'' = -1.$$

Ainsi les trois fractions partielles dans lesquelles se décompose la proposée, sont comme on les a trouvées plus haut,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

105. Si parmi les facteurs simples du dénominateur, plusieurs étaient égaux entre eux, la décomposition de la fraction ne pourrait plus avoir lieu dans la forme précédente : en effet, en revenant aux formules données pour l'évaluation des indéterminés, A, A'....$A^{(n-1)}$, on trouve que, dans l'hypothèse présente, plusieurs de ces numérateurs deviennent infinis, et qu'ils le deviendraient tous, si tous les facteurs simples du dénominateur étaient égaux entre eux. On peut d'ailleurs reconnaître l'illégitimité de la décomposition précédente dans l'hypothèse actuelle. Supposons en effet qu'on puisse poser

$$\frac{a+bx}{(x-c)^2} = \frac{A}{x-c} + \frac{A'}{x-c},$$

on aurait donc

$$\frac{a+bx}{(x-c)^2} = \frac{(A+A')(x-c)}{(x-c)^2},$$

d'où on déduirait les deux équations

$$A + A' = b; -c(A+A') = a,$$

résultats inadmissibles. En admettant la décomposition

$$\frac{1}{(x+a)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{A'}{x+a},$$

après avoir réduit au même dénominateur et comparé, on trouverait

$$A + A' = 0 ; a (A + A') = 1 ,$$

relations qui ne peuvent avoir lieu en même temps.

Supposons donc que le dénominateur de la fraction $\frac{N}{D}$, renferme, outre les facteurs inégaux, pour lesquels on connaît le mode de composition, un nombre n de facteurs du premier degré, réels et égaux ; on pourra toujours supposer

$$\frac{N}{D} = \frac{P}{S} + \frac{K}{Q} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

S étant le produit de tous les facteurs inégaux, et Q celui des facteurs égaux, ensorte que D soit le produit des polynomes connus Q et S, et les plus hauts exposans de x dans P et dans K, étant moindres au moins d'une unité que les plus hauts exposans de x dans S et dans Q. En effet, l'équation (1) donne

$$\frac{N}{D} = \frac{PQ + KS}{QS}, \text{ d'où } N = PQ + KS,$$

puisque, par supposition, $D = QS$. Soit D un polynome du degré q, et S du degré m, m étant $< q$; N sera du degré $q-1$, et Q du degré $q - m$; P devra être du degré $m - 1$, et K, du degré $q - m - 1$; P aura donc m termes, et m coefficiens indéterminés, et K en aura $q - m$. Le produit PQ sera donc du degré $q - 1$, ainsi que le produit KS, c'est-à-dire, que $PQ + KS$ sera du degré $q - 1$, ou de même degré que N; ainsi $PQ + KS$ contiendra q coefficiens indéterminés ; donc N ayant q termes, on pourra former entre les coefficiens de $PQ + KS$, et ceux de N, des équations linéaires en nombre q, lesquelles serviront à déterminer les q coefficiens de P et de K, d'où résulte que la décomposition est toujours possible, et qu'on pourra poser

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{Px^{n-1} + P'x^{n-2} + \ldots\ldots + P^{(n-1)}}{(x-6)^n}$$

dans l'hypothèse

$$D = (x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'') \text{ etc.} \ldots (x-6)^n.$$

La fraction

$$\frac{Px^{n-1} + P'x^{n-2} + \ldots\ldots + P^{(n-1)}}{(x-6)^n}$$

par l'hypothèse $x - 6 = z$, d'où $x = z + 6$, prend la forme

$$\frac{B}{z^n} + \frac{B'}{z^{n-1}} + \frac{B''}{z^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{B^{(n-1)}}{z},$$

les numérateurs B, B' ..... $B^{(n-1)}$ étant indépendans de z, ainsi que le démontre le calcul : on pourra donc supposer

$$\frac{N}{D} = \frac{B}{(x-6)^n} + \frac{B'}{(x-6)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{B^{(n-1)}}{x-6} + \frac{P}{S},$$

$\frac{P}{S}$ représentant la somme des fractions partielles dues aux facteurs inégaux contenus dans D. Si on réduit au même dénominateur, on trouvera

$$N = S[B + B'(x-6) + B''(x-6)^2 + \ldots + B^{(n-1)}(x-6)^{n-1}] + P(x-6)^n,$$

d'où l'on déduit

$$P = \frac{N - S[B + B'(x-6) + B''(x-6)^2 + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x-6)^{n-1}]}{(x-6)^n}$$

Or P devant être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible exactement n fois de suite par le denominateur $x - 6$; ce qui exige que la partie

$N' - BS$ du numérateur devienne séparément nulle lorsque $x = \zeta$; donc

$$B = \frac{(N)}{(S)},$$

(N) et (S) désignant ce que deviennent N et S lorsqu'on y fait $x = \zeta$; conséquemment

$$N - BS = N - \frac{(N)}{(S)} S,$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N'(x - \zeta)$, ensorte que

$$P = \frac{N' - S[B' + B''(x - \zeta) + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x - \zeta)^{n-2}]}{(x - \zeta)^{n-1}},$$

en effaçant le facteur commun $x - \zeta$. Faisant le même raisonnement, et supposant encore $x = \zeta$, on aura,

$$B' = \frac{(N')}{(S)},$$

où N et S, entre parenthèses, rappellent la substitution $x = \zeta$; donc

$$N' - SB' = N' - \frac{(N')}{(S)} S$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N''(x - \zeta)$, ce qui donnera,

$$P = \frac{N'' - S[B'' + B'''(x - \zeta) + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x - \zeta)^{n-3}]}{(x - \zeta)^{n-2}}.$$

On trouverait de la même manière, dans l'hypothèse $x = \zeta$,

$$B'' = \frac{(N'')}{(S)},$$

et conséquemment

$$P=\frac{N'''-S[B'''+B^{iv}(x-\beta)+\ldots\ldots+B^{(n-1)}(x-\beta)^{n-4}]}{(x-\beta)^{n-3}},$$

d'où on déduit pour $x=\beta$,

$$B'''=\frac{(N''')}{(S)},$$

et ainsi des autres numérateurs.

Prenons pour premier exemple la fraction

$$\frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)},$$

pour laquelle les fractions partielles qui résultent du facteur quarré $(1-x)^2$ du dénominateur, sont

$$\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{B'}{1-x}.$$

On a ici

$$N=x^3,\ S=1+x^4;\ \text{d'où}\ \frac{N}{S}=\frac{x^3}{1+x^4},$$

ce qui donne

$$B=\frac{(N)}{(S)}=\tfrac{1}{2}$$

pour $x=1$; donc

$$N-\frac{(N)}{(S)}S=-\tfrac{1}{2}+x^3-\tfrac{1}{2}x^4,$$

et divisant par $1-x$, conformément à la règle, il vient pour quotient

$$N'=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^3,$$

et conséquemment

$$\frac{N'}{S}=\frac{-1-x-x^2+x^3}{2(1+x^4)};$$

donc

$$B' = \frac{(N')}{(S)} = -\tfrac{1}{2}$$

pour $x = 1$. Les fractions dues au facteur $(1-x)^2$ sont donc

$$\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)}.$$

Soit encore la fraction

$$\frac{x^2}{(1-x)^3(1+x^2)}$$

pour laquelle les fractions partielles dues au facteur $(1-x)^3$, sont

$$\frac{B}{(1-x)^3} + \frac{B'}{(1-x)^2} + \frac{B''}{1-x}.$$

Dans ce cas

$$N = x^2,\ S = 1 + x^2,$$

on aura donc

$$\frac{N}{S} = \frac{x^2}{1+x^2},\ \text{et } B = \tfrac{1}{2}$$

pour $x = 1$. On trouve ensuite

$$N' = \frac{\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}}{1-x} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x,$$

ce qui donne

$$\frac{N'}{S} = \frac{-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}}{1+x^2};\ \text{donc } B' = -\tfrac{1}{2};$$

on a

$$N'' = \frac{-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2}{1-x} = -\tfrac{1}{2}x;$$

donc

$$\frac{N''}{S}=\frac{1-x}{2(1+x^2)} \text{ et } B''=-\tfrac{1}{4}.$$

Ainsi les fractions partielles qui naissent du facteur cubique $(1-x)^3$ du dénominateur, sont

$$\frac{1}{2(1-x)^3}-\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x)}.$$

106. Nous conseillerons à ceux de nos lecteurs qui voudraient compléter cette théorie, de consulter l'ouvrage d'*Euler*, ayant pour titre : *Introductio in analysin infinitorum*, ou la traduction avec des notes par le citoyen *Labey*, l'un des professeurs de mécanique à l'École Polytechnique. Si nous n'avons pas donné au titre précédent toute l'étendue qu'il comporte, en ne considérant pas tous les cas qui peuvent se rencontrer, c'est parce que le calcul différentiel offre des méthodes beaucoup plus brièves pour évaluer les numérateurs des fractions partielles dues aux facteurs inégaux, réels ou imaginaires, aux facteurs égaux, et aux facteurs doubles, réels inégaux et égaux, dans lesquels on peut décomposer le dénominateur de la fraction proposée, comme on peut le voir dans les Traités de calcul intégral, et dans mes Leçons d'Analyse à l'École Polytechnique, dont je prépare une seconde édition qui paraîtra incessamment.

CHAPITRE XXII.

Transformation des fractions.

107. Nous avons cru qu'on ne serait pas fâché de trouver ici un extrait d'un mémoire donné sur cette question par *Lagrange*, lequel est consigné dans le *cinquième cahier du Journal de l'École Polytechnique.*

Soit une fraction $\frac{B}{A}$ qu'on suppose moindre que l'unité, et réduite à sa plus simple expression, ensorte que les nombres A et B soient premiers entre eux. Si l'on demandait de transformer cette fraction en une autre dont le numérateur ou le dénominateur fût donné, il est clair que cela ne serait possible, à la rigueur, qu'autant que le nouveau numérateur ou dénominateur serait un multiple du numérateur ou du dénominateur donné. Mais si l'on veut se contenter d'une approximation, le problème est toujours résoluble, et il s'agira de déterminer la nouvelle fraction, de manière qu'elle approche le plus qu'il est possible de la fraction donnée.

Ainsi, en désignant par $\frac{m}{a}$ cette nouvelle fraction, dans laquelle nous supposerons que le dénominateur a soit donné, le problème consistera à déterminer m, ensorte que la différence entre les deux fractions $\frac{B}{A}$ et $\frac{m}{a}$ soit la plus petite possible. Or cette différence est $= \frac{Ba - Am}{Aa}$: il s'agira donc de déterminer m, d'après la condition que le nombre $Ba - Am$ devienne le plus petit possible, puisqu'alors la différence sera la plus petite pour le même dénominateur a. Il est visible qu'il n'y

n'y aura qu'à prendre pour m le quotient en nombre entier de Ba par A : alors désignant le reste de la division par R, on aura

$$Ba - Am = R, \text{ et } \frac{Ba - Am}{Aa} = \frac{R}{Aa},$$

ou R est $< A$, ensorte que $\frac{R}{Aa}$ est une différence plus petite qu'elle ne le serait pour tout autre nombre m.

Mais on doit observer ici que le reste d'une division peut être positif où négatif, suivant qu'on prendra pour quotient le nombre qui, multiplié par le diviseur, donnera un produit immédiatement moindre ou plus grand que le dividende. Dans l'arithmétique, on fait toujours la division de manière que les restes soient positifs ; mais, dans la théorie générale des nombres, on peut employer des restes positifs ou négatifs ; et on peut même, par ce moyen, faire ensorte que le reste soit toujours moindre que la moitié du diviseur : car il est évident que si le reste est plus grand que cette moitié, en augmentant ce quotient d'une unité, il faudra retrancher le divisenr du reste, ce qui donnera un reste négatif et moindre que la moitié du diviseur.

Or on peut, pour plus de simplicité, appeler *division en dedans* celle pour laquelle le reste est positif, et *division en dehors* celle qui donne un reste négatif ; parce qu'en effet dans la première, le produit du quotient par le diviseur tombe en dedans du dividende, et que dans la seconde, il tombe en dehors.

Soit donc

$$Ba - Am = \pm C \ldots\ldots (1°.)$$

ou $\pm C$ représente le reste de la division de Ba par A et m le quotient ; on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{C}{Aa} \ldots\ldots (1);$$

on pourra donc traiter de la même manière la fraction $\frac{C}{A}$ dans laquelle C est toujours nécessairement moindre que A, et la réduire à une autre fraction connue $\frac{n}{b}$, dont le dénominateur b soit encore donné, et qui approche le plus qu'il est possible de la même fraction. On fera ainsi

$$Cb - An = \pm D \ldots\ldots (2°),$$

où $\pm D$ sera le reste de la division de Cb par A, et n le quotient. On aura de cette manière

$$\frac{C}{A} = \frac{n}{b} \pm \frac{D}{Ab} \ldots\ldots (2).$$

On pourra, si l'on veut, continuer de même, en faisant

$$Dc - Ap = \pm E \ldots\ldots (3°)$$

et l'on aura

$$\frac{D}{A} = \frac{p}{c} \pm \frac{E}{Ac} \ldots\ldots (3),$$

et ainsi de suite.

108. Nous remarquerons ici que le nombre B étant $< A$, par l'hypothèse, les nombres suivans C, D, etc. seront aussi moindres que A, puisqu'ils sont les restes des divisions de Ba, Cb, etc. par A. De là résulte que les numérateurs m, n, p, etc. ne pourront jamais être plus grands que leurs dénominateurs respectifs a, b, c, etc.

Car en considérant l'équation

$$Ba - Am = \pm C,$$

si Ba est $> Am$, on aura

$$Ba - Am = C; \text{ donc } Am = Ba - C < Ba;$$

mais A étant $> B$, le nombre m sera nécessairement $< a$. Dans le cas contraire de $Ba < Am$, on aura

$Ba - Am = -C$; donc $Am = Ba + C$, et $A(m-1) = Ba + C - A$;

mais de ce qu'on a $A > C$, résulte $C - A < 0$; donc

$$A(m-1) < Ba;$$

et comme B est $< A$, $m-1$ sera nécessairement $< a$; conséquemment

$$m < a + 1.$$

On démontrera de la même manière par l'équation

$$Cb - An = \pm D,$$

que l'on aura, dans tous les cas,

$$n < b + 1,$$

et ainsi de suite.

Lorsqu'on détermine les numérateurs m, n, etc. de manière que les restes des divisions de Ba, Cb, etc. par A, soient positifs, alors on déduit de la démonstration précédente

$$m < a,\ n < b,\ p < c, \text{ etc.}$$

En substituant successivement cette suite de valeurs $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, etc. tirées des équations (2), (3), etc. dans (1), on aura cette suite de transformées

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{C}{Aa} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{D}{Aab} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{p}{abc} \pm \frac{E}{Aabc},$$

etc.

109. Faisons une application à la fraction $\frac{887}{1103}$, et prenons tous les quotiens en dessous : on a, pour $a = 2$,

$$m = \frac{2.887}{1103} - \frac{C}{1103} = 1 - \frac{671}{1103},$$

et

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{671}{2.1103};$$

pour $b = 3$,

$$n = \frac{3.671}{1103} - \frac{D}{1103} = 1 - \frac{910}{1103};$$

conséquemment

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{910}{2.3.1103}:$$

pour $c = 4$,

$$p = \frac{4.910}{1103} - \frac{E}{1103} = 3 - \frac{331}{1103};$$

donc

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{331}{2.3.4.1103};$$

pour $d = 5$,

$$q = \frac{5.331}{1103} - \frac{F}{1103} = 1 - \frac{552}{1103}.$$

En prenant pour e, f, etc. la suite des nombres naturels 6, 7, etc. on trouverait

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{1}{2....5} + \frac{3}{2....6} + \frac{1}{2.....9} + \text{etc.}$$

en observant qu'on passe de la fraction qui a 2.3.4.5.6 pour dénominateur à celle dont le dénominateur est 2.3.4.5.6.7.8.9: ensorte que les fractions approchées en moins, sous les dénominateurs 2, 2.3, 2.3.4, etc., sont

$$\frac{1}{2},\ \frac{4}{6},\ \frac{19}{2.3.4},\ \frac{96}{2.3.4.5},\ \frac{579}{2....6},\ \frac{291817}{2....9},\ \text{etc.}$$

Nous développerons la même fraction, mais en faisant la division tantôt en dehors et tantôt en dedans. On a toujours, pour $a = 2$,

$$m = \frac{2.887}{1103} = \frac{C}{1103} = 2 - \frac{432}{1103},$$

et

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{432}{2.1103};$$

pour $b = 3$,

$$n = \frac{3.432}{1103} - \frac{D}{1103} = 1 + \frac{193}{1103};$$

conséquemment

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{193}{2.3.1103};$$

pour $c = 4$,

$$p = \frac{4.193}{1103} - \frac{E}{1103} = 1 - \frac{331}{1103};$$

donc

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{331}{2.3.4.1103};$$

pour $d = 5$,

$$q = \frac{5.331}{1103} - \frac{F}{1103} = 2 - \frac{551}{1103};$$

d'où

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{2}{2.3.4.5} - \frac{551}{2.3.4.5.1103};$$

enfin, pour $e = 6$,

$$r = \frac{6.551}{1103} - \frac{G}{1103} = 3 - \frac{3}{1103},$$

et continuant, on trouverait,

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{2}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{2}{2\ldots5} - \frac{3}{2\ldots6} + \frac{1}{2\ldots9}, \text{ etc.}$$

en faisant même observation que ci-dessus à l'égard des deux dernières fractions.

La somme des trois premières fractions donne $\frac{19}{24}$, ainsi qu'on l'a trouvée précédemment ; ajoutant la quatrième, on a $\frac{97}{2.3.4.5}$, au lieu de $\frac{96}{2.3.4.5}$; prenant encore la cinquième, on obtient $\frac{579}{2.3.4.5.6}$.

On remarquera donc, à l'égard des signes successifs des séries, que celui du second terme est le même que celui du premier reste ; que celui du troisième doit être le produit de ceux des deux premiers restes ; que celui du quatrième est le produit de ceux des trois premiers restes, et ainsi de suite.

110. Si les dénominateurs donnés sont tous égaux entre eux, alors la série prend cette forme plus simple

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{a^2} \pm \frac{p}{a^3} \pm \text{etc.}$$

et il est facile de voir que si l'on fait $a = 10$, et qu'on prenne tous les restes positifs, c'est-à-dire, qu'on fasse toutes les divisions en dedans, comme on le pratique dans l'arithmétique, on aura la réduction connue de la fraction $\frac{B}{A}$ en décimales, ou les numérateurs m, n, p, etc. sont les caractères successifs de la fraction. En effet, m sera le quotient de la division de aB ou de $10B$ par A et C le reste ; n le quotient de la division de aC ou de $10C$ par A et D le reste et ainsi de suite, ce qui revient à l'opération connue de la division par décimales.

On remarquera maintenant que tous les dénominateurs étant égaux, les numérateurs m, n, p, etc. doivent nécessairement revenir les mêmes et former une série periodique : car les restes C, D, E, etc. étant tous moindres que le diviseur A, il devra arriver que dans la suite des opérations un des restes soit répeté. Supposons, par exemple, que le reste E soit égal au reste C, comme n est le quotient et D le reste de la division de Cb par A, que de même q est le quotient et F le reste de la division de Ed par A, à cause de $a=b=c$, on aura $q=n$ et $F=D$; et par la même raison $r=p$, $G=E$ et ainsi de suite; de sorte que les quotiens n, p, etc. reviendront toujours à l'infini et formeront une suite périodique de deux termes. C'est ce qui a lieu, comme on sait dans l'arithmétique ordinaire, lorsqu'on réduit une fraction quelconque en décimales.

De là on peut conclure réciproquement que si l'on a une série numérique quelconque de la forme

$$\frac{m}{a} \pm \frac{n}{a^2} \pm \frac{p}{a^3} \pm \text{etc.}$$

laquelle aille à l'infini, sans que les numérateurs m, n, p etc. qui doivent tous être $< a+1$, forment une suite périodique, cette série ne pourra jamais représenter une fraction rationnelle.

111. Considérons maintenant plus particulièrement le cas o les numérateurs m, n, etc. sont donnés et supposons que ces numérateurs soient tous égaux à l'unité, ce qui rend la forme de la série la plus simple et la plus convergente.

Dans ce cas, les équations (1°.), (2°.), (3°.) etc. deviendront

$$Ba - A = \pm C;\ Cb - A = \pm D;\ Dc - A = \pm E, \text{ etc.}$$

Ainsi l'on prendra pour a le quotient de la division de A par B, pour b le quotient de la division de A par le reste C; pour c le quotient de la division de A par le reste D, et ainsi

de suite. De sorte que, dans les opérations, on comparera successivement tous les restes au même dividende A, ce qui rendra la suite des restes décroissante, et celle des quotiens a, b, c, croissante, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul, ce qui terminera l'opération et la série. On aura alors, pour le développement de la fraction

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{ab} \pm \frac{1}{abc} \pm \text{etc.}$$

Si l'on fait toutes les divisions en dedans, comme à l'ordinaire, les restes C, D, etc. auront le signe négatif, et par conséquent les signes de la série seront alternativement positifs et négatifs. En effet B, C, D, etc. étant $< A$, on a

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{C}{aA}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{b} - \frac{D}{bA}$$

$$\frac{D}{A} = \frac{1}{c} - \frac{E}{cA},$$

etc.

où chacun des restes C, D, E, etc. est négatif. Dans les substitutions succesives qui donnent

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{D}{abA}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} - \frac{E}{abcA};$$

etc.

on remarque que le signe du second terme est le même que celui du premier reste; que le signe du troisième terme doit être le produit de ceux des deux premiers restes; que le signe du quatrième doit être le produit de ceux des trois premiers

restes, et ainsi de suite. Pour que la série n'ait que des termes positifs, il faudra que les divisions successives soient toutes en dehors, pour que les restes C, D, etc. dans les formules ci-dessus, soient tous affectés du signe $+$.

Au reste, si l'on voulait avoir la série la plus convergente, il faudrait faire chaque division en dedans ou en dehors, suivant qu'elle donnera le reste le plus petit.

112. Comme cette manière de convertir une fraction en série est peu connue, et peut être utile dans beaucoup de cas, nous l'éclaircirons par quelques exemples.

Soit donc la fraction $\frac{887}{1108}$, et faisons les divisions en dedans; nous aurons ce tableau d'opérations

Dividende	Diviseur	Quotient	Produit
887	1103	1	887
216	1103	5	1080
23	1103	47	1081
22	1103	50	1100
3	1103	367	1101
2	1103	551	1102
1	1103	1103	1103
			0

Les restes sont -216, -23, -22, -3, -2, -1, et les quotiens 1, 5, 47, 50, 367, 551, 1103, de sorte que l'on aura cette série alternative

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5.47} - \frac{1}{5.47.50} + \frac{1}{5.47.50.367}$$

$$-\frac{1}{5.47.50.367.551}+\frac{1}{5.47.50.367.551.1103}.$$

Prenons la fraction qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, et qui est en décimales

3,141592 653589 793238 462643 38, etc.

en faisant la même opération sur la fraction

$$\frac{141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 38,\ \text{etc.}}{1000000\ 000000\ 000000\ 000000\ 00,\ \text{etc.}};$$

et faisant les divisions en dedans ou en dehors, suivant qu'il sera nécessaire, on trouvera les quotiens 7, 113, 4739, 47051, 499762, et l'on aura la série très-convergente

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}-\frac{1}{7.113.4739}+\frac{1}{7.113.4739.47051}$$
$$+\frac{1}{7.113.4739.47051.499762}.$$

La somme des deux premiers termes donne le rapport $\frac{22}{7}$, trouvé par *Archimède*; et en y ajoutant le troisième, on a celui de *Metius* $\frac{355}{133}$.

Nous regrettons de ne pouvoir faire connaître en entier cet excellent écrit de *Lagrange*, dans lequel ce géomètre traite la question de réduire une fraction à d'autres fractions exprimées en moindres termes, et qui soient les plus approchantes qu'il est possible de la fraction donnée; problême, ajoute-t-il, l'un des plus intéressans de l'arithmétique, soit par les artifices qu'il exige, soit par les usages dont il est susceptible.

CHAPITRE XXIII.

Notions sur l'analyse indéterminée.

113. Nous avons vu (1re sect. chap. XVI) comment on pouvait évaluer un certain nombre d'inconnues au moyen du même nombre d'équations. Mais lorsque la question ne fournit pas autant d'équations que d'inconnues, il y a de ces inconnues dont on peut disposer arbitrairement. Ces sortes de questions sont dites *indéterminées*, parce qu'elles admettent un nombre indéfini de solutions.

Cependant, comme d'un autre côté on ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés doivent être entiers et même positifs, le nombre des solutions possibles se trouve réduit, de sorte que souvent il n'en existe qu'un très-petit nombre, et que quelquefois le problême n'en admet pas. Cette partie de l'analyse exige des artifices particuliers de calcul, propres à exercer l'esprit des commençans, et à exercer leur sagacité.

Nous commencerons par cette question bien facile : *Trouver deux nombres entiers et positifs, dont la somme fasse* 10.

Indiquant l'un de ces nombres par x, et l'autre par y, on aura pour traduction

$$x+y=10, \quad \text{d'où } x=10-y.$$

D'après la restriction énoncée, on ne peut prendre pour y que la suite des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 9 inclusivement, ensorte qu'on a pour y et x cette suite de valeurs correspondantes

$$y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$
$$x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Or les quatre dernières de ces neuf solutions étant les mêmes que les quatre premières, la question n'admet véritablement que cinq solutions différentes en nombres entiers.

Que si l'on demandait trois nombres dont la somme fût égale à 10, on n'aurait qu'à partager en deux parties l'un des nombres qu'on vient de trouver, et on obtiendrait un plus grand nombre de solutions.

114. Supposons qu'on ait pour traduction d'une question, l'équation

$$x = by + c:$$

tout nombre entier et positif pris pour y, donnera pour x un nombre entier et positif, tandis que pour l'équation

$$x = -by + c$$

on ne trouvera pour x de valeurs positives qu'autant qu'on prendra pour y des nombres positifs, tels qu'on ait $by < c$. L'équation proposée étant

$$x = -by - c,$$

il sera impossible de satisfaire à la restriction énoncée.

Soit, en second lieu, l'équation

$$ax = by + c, \text{ d'où } x = \frac{by + c}{a};$$

on ne découvre plus aussi facilement que dans le cas précédent les solutions en nombres entiers et positifs. Nous observerons avant tout, qu'il convient de résoudre la proposée par rapport à celle des deux inconnues qui a le plus petit coefficient, afin que la première division soit possible. Cela posé, nous ferons connaître l'esprit de la méthode sur un exemple particulier. Soit l'équation

$$17x = 23y + 19, \text{ d'où } x = \frac{23y + 19}{17} = y + 1 + \frac{6y + 2}{17}:$$

on devra avoir, d'après la restriction énoncée par rapport aux

nombres x et y, $\frac{6y+2}{17}$ nombre entier ; ainsi nous poserons

$$\frac{6y+2}{17}=E, \text{ d'où } y=\frac{17E-2}{6}=2E+\frac{5E-2}{6}.$$

Pareillement $\frac{5E-2}{6}$ doit être un nombre entier ; ainsi nous aurons

$$\frac{5E-2}{6}=E', \text{ d'où } E=\frac{6E'+2}{5}=1E'+\frac{E'+2}{5}.$$

$\frac{E'+2}{5}$ doit être un nombre entier ; nous écrirons donc

$$\frac{E'+2}{5}=E'', \text{ d'où } E'=5E''-2:$$

de là cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{l} E'=5E''-2 \\ E=\ E'+E'' \\ y=2E\ +E' \\ x=y\ +E+1 \end{array}\right\} \text{d'où résultent les valeurs} \left\{\begin{array}{l} E'=5E''-2 \\ E=6E''-2 \\ y=17E''-6 \\ x=23E''-8+1: \end{array}\right.$$

il sera facile de voir qu'en prenant pour E'' des nombres entiers et positifs, à partir de l'unité, on aura toujours pour x et pour y des nombres entiers et positifs. Supposons qu'on ait résolu la proposée par rapport à y : on aurait

$$y=\frac{17x-19}{23}=E,$$

E désignant un nombre entier : de là on déduirait

$$x=\frac{23E+19}{17},$$

ce qui nous ramenerait à avoir pour diviseur le plus petit des

deux coefficiens, ainsi que nous l'avions choisi d'abord. Généralisons et supposons l'équation

$$x=\frac{by+c}{a},$$

le nombre a étant $<b$. On aura d'abord, en divisant b et c par a, désignant les quotiens par q et Q, et les restes par r et R,

$$x=qy+Q+\frac{ry+R}{a}.$$

Il faudra donc que $\frac{ry+R}{a}$ soit un nombre entier E, c'est-à-dire, qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l}\frac{ry+R}{a}=E\\ \frac{r'E-R}{r}=E'\\ \frac{r''E'+R}{r'}=E''\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l}y=\frac{aE-R}{r}=q'E+\frac{r'E-R}{r}\\ E=\frac{rE'+R}{r'}=q''E'+\frac{r''E'+R}{r'}\\ E'=\frac{r'E''-R}{r''}=q'''E''+\frac{r'''E''-R}{r''}\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

D'abord on divise b par a, puis le diviseur a par le premier reste r, puis ce reste par le second reste r', puis r' par le troisième reste r'' et ainsi de suite, et l'opération s'arrête lorsqu'on parvient à un reste l'unité, parce qu'ayant par exemple, $r'''=1$, de

$$\frac{r'''E''-R}{r''}=E''',$$

on déduit

$$E''=r''E'''+R.$$

C'est ce qui arrive lorsque a et b sont des nombres premiers entre eux; car alors la fraction $\frac{b}{a}$ étant irréductible, en opé-

rant sur les deux termes, ainsi que nous venons de le dire, on parvient à un plus grand commun diviseur qui est l'unité (1[ère] sect. n° 80), on a donc

$$b=aq+r;\ a=rq'+r';\ r=r'q''+r'';\ r'=r''q'''+1,$$

et on trouve, après avoir réduit au moyen de ces égalités,

$$\left.\begin{array}{l} E''=r''E'''+R \\ E'=r'E'''+f \\ E=r\,E'''+g \\ y=a\,E'''+h \\ x=b\,E'''+k \end{array}\right\}\ \text{où}\ \left\{\begin{array}{l} f=q'''R \\ g=fq''+R \\ h=gq'+f \\ k=hq+Q. \end{array}\right.$$

Si le terme tout connu c est plus petit que le dénominateur a, le reste R doit être remplacé par ce nombre c. Si le nombre c est exactement divisible par a, le reste $R=0$, et il est inutile d'opérer ainsi qu'on la dit sur la fraction $\frac{b}{a}$, puisqu'alors

$$f=0,\ g=0,\ h=0,\ k=0,$$

et conséquemment

$$y=aE''',\ x=bE'''+Q.$$

On remarquera encore que dans les valeurs générales d'x et d'y, les coefficiens a et b de ces inconnues dans la proposée, sont, dans un ordre inverse, facteurs de E'''.

Supposons maintenant que les nombres a et b ne soient pas premiers entre eux, ainsi qu'il arrive dans l'équation

$$9x=15y+2:$$

nous trouverons

$$x=\frac{15y+2}{9}=y+\frac{6y+2}{9}=y+E,$$

de sorte que

$$9E=6y+2, \text{ ou } 6y=9E-2,$$

ainsi

$$y=\frac{9E-2}{6}=E+\frac{3E-2}{6}=E+E',$$

de façon que

$$E=\frac{6E'+2}{3}=2E'+\tfrac{2}{3}.$$

Or il est bien clair que le second membre ne peut jamais devenir un nombre entier, le nombre E' devant être entier. Ces sortes de questions sont donc impossibles, lorsque a et b n'étant pas premiers entre eux, le nombre c n'est pas exactement divisible par leur plus grand commun diviseur. Si cela était, on ferait d'abord cette division qui ramènerait les coefficiens d'x et d'y à des nombres premiers.

115. Si l'équation proposée est

$$x=\frac{-by\pm c}{a},$$

il y a une observation essentielle à faire sur les signes de..... E'', E', E, y et x, résultats qui dailleurs s'obtiennent d'après le même procédé : pour la mettre plus en évidence, prenons l'équation

$$x=\frac{-23y+19}{17}$$

déja traitée précédemment, mais en prenant y avec le signe $+$, nous aurons

$$x=\frac{-23y+19}{17}=-1y+1+\frac{2-6y}{17}$$

$$\frac{2-6y}{17}=+E;\; y=\frac{2-17E}{6}=-2E+\frac{2-5E}{6}$$

$$\frac{2-5E}{6}=+E';\; E=\frac{2-6E'}{5}=-1E'+\frac{2-E'}{5}$$

$$\frac{2-E'}{5}=+E'';\; E'=2-5E'',$$

et

et remontant, on trouve

$$\begin{aligned} E' &= -\ 5E''+2 \\ E &= +\ 6E''-2 \\ y &= -17E''+6 \\ x &= \ \ 23E''-8+1, \end{aligned}$$

résultats qui diffèrent de deux en deux; par le signe seulement, de ceux qui se rapportent à l'équation

$$x = \frac{23y+19}{17}.$$

116. Dans le cas où le problème est plus qu'indéterminé, l'équation finale renferme, au moins, trois inconnues x, y et z, et alors elle est de la forme

$$x = \frac{by+cz+d}{a}:$$

dans ce cas, on suppose $z=1$, ce qui la change en

$$x = \frac{by+(c+d)}{a}$$

et on cherche toutes les solutions possibles, puis, pour $z=2$, on traite l'équation

$$x = \frac{by+(2c+d)}{a}$$

et ainsi de suite pour chaque hypothèse faite sur z.

117. Éclaircissons cette théorie par quelques exemples :

1°. *On demande de combien de manières on peut faire équilibre à un poids de 254 kilogrammes, en mettant dans l'autre bassin de la balance des poids de 11 et de 5 kilogrammes?*

Représentant par x le nombre des poids de 11 kilogrammes,

et par y celui des poids de 5, on aura pour équation

$$11x + 5y = 254,$$

qui, comme on l'a fait voir plus haut, ne peut admettre qu'un nombre fini de solutions. On déduit de là

$$x = 23 + \frac{1 - 5y}{11}.$$

Posons, ainsi qu'on l'a fait dans la théorie générale,

$$E = \frac{1 - 5y}{11}; \text{ donc } y = \frac{1 - 11E}{5} = -2E + \frac{1 - E}{5}.$$

Soit encore

$$\frac{1 - E}{5} = E', \text{ d'où } E = 1 - 5E',$$

ensorte que

$$y = 11E' - 2,\ x = 24 - 5E'.$$

On ne peut prendre pour E' un nombre négatif, parce qu'on aurait pour y un tel nombre; il faut d'ailleurs, pour que la valeur de x soit positive, qu'on ait

$$5E' < 24, \text{ ou } E' < \frac{24}{5}.$$

Ainsi la plus grande valeur de E', en nombre entier positif, est $E' = 4$. On aura donc

$$x = 19,\ = 14,\ = 9,\ = 4$$
$$y = 9,\ = 20,\ = 31,\ = 42.$$

2°. *Un avare possède plusieurs sacs de 1200 livres chacun. En les comptant une première fois trois par trois, il n'en trouva aucun de reste ; une seconde fois il les compta sept à sept, et il n'en resta qu'un : les comptant une dernière fois de dix en*

dix, il en resta six. On demande combien l'avare possédait de sacs, sachant d'ailleurs qu'il en avait plus de cent, mais moins de trois cents?

Si l'on désigne par x le nombre inconnu de sacs, il résulte des conditions de la question, que $\frac{x}{3}$, $\frac{x-1}{7}$ et $\frac{x-6}{10}$ doivent être des nombres entiers positifs, ensorte que toute combinaison de ces nombres, par voie d'addition ou de soustraction, doit être aussi un nombre entier positif, et le désignant par E, on peut poser

$$E=\frac{x}{3}-\left[\frac{x-1}{7}+\frac{x-6}{10}\right],$$

d'où

$$x=11E-8+\frac{E-4}{19}.$$

Faisant

$$\frac{E-4}{19}=E', \text{ il viendra } E=19E'+4;$$

donc

$$x=210E'+36.$$

Mais x doit être >100 et <300; donc

$$210E'+36>100, \text{ d'où } E'>\frac{64}{210}, \text{ ou } E'>0$$

$$210E'+36<300, \text{ d'où } E'<\frac{264}{210}, \text{ ou } E'<2.$$

Ainsi il n'y aura d'hypothèse admissible que celle de $E=1$, ce qui conduit à

$$x=210+36=246,$$

nombre de sacs à déterminer.

3°. *Trouver un nombre qui, divisé par 2, donne pour reste 1; divisé par 3, donne pour reste 2; divisé par 5, donne pour reste 3?*

On a les trois nombres entiers et positifs

$$\frac{x-1}{2},\ \frac{x-2}{3},\ \frac{x-3}{5},$$

x désignant le nombre cherché. Ainsi la combinaison

$$E=\frac{10(x-2)+6(x-3)-15(x-1)}{30}$$

qu'on obtient en retranchant le premier nombre de la somme des deux derniers, est encore un nombre entier et positif. Effectuant les multiplications, on a

$$E=\frac{x-23}{30},\ \text{d'où } x=30E+23.$$

Faisant successivement

$$E=0,=1,=2,=3,\ \text{etc.}$$

on trouvera, pour les valeurs correspondantes de x en nombre indéfini,

$$x=23,=53,=83,=113,\ \text{etc.}$$

118. Lorsqu'on a à résoudre une équation de cette forme

$$ax-by=\pm c,$$

a, b, c étant des nombres entiers positifs ou négatifs, il suffit de connaître une première solution pour découvrir toutes les autres.

Supposons en effet que l'on sache que les valeurs

$$x=p,\quad y=q$$

satisfont ensemble à la proposée, on aura donc

$$ap-bq=\pm c,$$

et conséquemment

$$ax - by = ap - bq, \text{ d'où } \frac{x-p}{y-q} = \frac{b}{a} \ldots\ldots(1),$$

la fraction $\frac{b}{a}$ étant supposée réduite à ses moindres termes. Or l'équation (1) permet de poser en général

$$x - p = mb, \ y - q = ma,$$

m étant un nombre entier ; de sorte qu'on aura généralement

$$x = p + mb; \ y = q + ma.$$

Les valeurs de x et de y doivent donc former des progressions par différences égales. Qu'on prenne pour m la suite des nombres naturels, en commençant par zéro, et on aura les valeurs suivantes de x et de y

$$x = p, \ = p + b, \ = p + 2b, \ = p + 3b \ldots p + mb$$
$$y = q, \ = q + b, \ = q + 2b, \ = q + 3b \ldots q + mb$$

il ne restera donc qu'à déterminer par la première méthode les plus petites valeurs p et q.

119. Nous avons déjà remarqué que la méthode pour trouver les plus petites valeurs de y et x, est celle qui servirait à trouver le plus grand commun diviseur entre les coefficiens de x et y. Mais cette dernière donne aussi la réduction d'une fraction ordinaire en fraction continue. Nous pouvons donc déduire la solution générale des équations indéterminées, des propriétés connues de ces sortes de fractions. En effet, soit l'équation générale

$$ax = by \pm c:$$

faisons $x = pc$, $y = qc$, la précédente deviendra

$$ap - bq = \pm 1.$$

Pour trouver les plus petites valeurs, en nombres entiers, de p et de q, qui satisfont à l'équation (3), on conver-

tira la fraction $\frac{b}{a}$ en fraction continue, par la méthode donnée (n° 9); et déduisant la série des fractions principales convergentes vers la même fraction $\frac{b}{a}$, des formules exposées (n° 10), la dernière de ces fractions sera $\frac{b}{a}$, et si on désigne l'avant-dernière par $\frac{p}{q}$, on aura, par la loi de ces fractions,

$$ap - bq = \pm 1,$$

le signe supérieur correspondant au cas où le quantième de la fraction $\frac{p}{q}$ est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantième est pair, en observant qu'ici nous ne comptons pas comme au n° 12, la fraction $\frac{1}{0}$ qui était la première.

Ces valeurs de p et de q ainsi trouvées, on aura d'abord

$$x = \pm pc, \quad y = \pm qc;$$

et conséquemment

$$(4) \ldots x = \pm pc + mb, \quad y = \pm qc + ma \ldots (5),$$

d'où on déduira toutes les solutions de la question.

Faisons une application de cette méthode à l'équation

$$39x = 56y + 11,$$

pour laquelle on a

$$a = 39, \; b = 56, \; c = 11;$$

on réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{56}{39}$ dont les deux termes sont des nombres premiers entre eux; et pour cela, on cherchera les quotiens successifs qui sont 1, 2, 3, 2 et 2, à l'aide desquels on formera les fractions

$$1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2$$
$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{23}{16},\ \frac{56}{39}.$$

La pénultième fraction sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$, de sorte qu'on aura

$$p = 23,\ q = 16;$$

et comme cette fraction est la quatrième, et par conséquent d'un quantième pair, il faudra prendre le signe supérieur. Ainsi l'on aura

$$x = 23.11 + 56m;\ y = 16.11 + 39m.$$

Quelqu'un achète des chevaux et des bœufs; il paye les premiers 31 pièces de 5 francs chaque, et les autres 20 : il se trouve que le prix total des bœufs surpasse de 7 pièces celui des chevaux; on demande le nombre des bœufs et celui des chevaux ?

En désignant par x le nombre des bœufs, et par y celui des chevaux, on trouvera

$$20x - 31y = 7.$$

La fraction irréductible $\frac{31}{20}$, réduite en fraction continue, donne les quotiens 1, 1, 1, 4, 2, ensorte qu'on a les fractions élémentaires

$$1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 2$$
$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{14}{9},\ \frac{31}{20},$$

d'où résulte $\frac{p}{q} = \frac{14}{9}$, ou

$$p = 14,\ q = 9;$$

conséquemment

$$x = 7.14 = 98 = pc;\ y = 7.9 = 63\ qc,$$

et...... $x = 98 + m.31$; $y = 63 + m.20$;

ensorte que les valeurs entières et positives de x et de y

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -2 \\ m = -1 \\ m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\ \text{sont}\left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ = 36 \\ = 67 \\ = 98 \\ = 129 \\ = 160 \\ = 191 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\ \text{et}\left\{\begin{array}{l} y = 3 \\ = 23 \\ = 43 \\ = 63 \\ = 83 \\ = 103 \\ = 123 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Nous remarquerons que, quoique le nombre b puisse être négatif dans l'équation (2), auquel cas elle deviendrait

$$ax + by = c,$$

on peut néanmoins opérer, comme il a été dit ci-dessus, en prenant la valeur de y avec le signe moins.

120. Supposons qu'on soit conduit à une seule équation entre trois inconnues, telle que

$$ax + by + cz = d,$$

on en déduira

$$ax + by = d - cz;$$

et alors supposant le nombre z déjà connu, les formules générales (4) et (5) deviendront *

$$x = \pm p\,(d - cz) + mb \ldots\ldots (6)$$

$$-y = \pm q\,(d - cz) + ma \ldots\ldots (7);$$

nous avons pris y négativement, d'après l'observation faite précédemment.

Soit l'équation particulière

$$5x + 8y + 7z = 50,\text{ d'où } 5x + 8y = 50 - 7z:$$

si l'on cherche le plus grand commun diviseur de la fraction $\frac{8}{5}$, on trouvera les quotiens successifs 1, 1, 1, 2, au moyen desquels on formera les fractions convergentes

$$1,\ 1,\ 1,\ 2$$
$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},$$

desquelles on déduira

$$p = -3,\ q = -2;$$

donc, d'après les formules (6) et (7),

$$x = -3.50 + 3.7z + 8m = 21z - 150 + 8m$$
$$y = 2.50 - 2.7.z - 5m = 100 - 14z - 5m,$$

expressions dans lesquelles on pourra prendre z et m arbitrairement, mais de manière à n'avoir pour x et pour y que des valeurs entières positives.

Reprenons le problème énoncé (1ere sect. n° 229) et que nous avons remarqué être indéterminé, puisqu'il renferme trois inconnues, et seulement deux conditions indépendantes. Les équations auxquelles nous avons été conduits, sont

$$x - 2y + z = 5;\quad 2x + y - z = 7;$$

multipliant la première par 2, et du produit retranchant la seconde, on a la suivante

$$3z - 5y = 3.$$

En appliquant la méthode du plus grand commun diviseur à la fraction $\frac{5}{3}$, on trouve les quotiens 1, 1, 2, et les fractions

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{5}{3},$$

ensorte que

$$p = 2,\quad q = 1;$$

donc

$$z = 2.3 + 5m = 6 + 5m;\ y = 3 + 3m.$$

Mais de la première des deux équations proposées, on déduit

$$x = 5 + 2y - z;$$

et par les substitutions des valeurs précédentes de y et de z, elle devient

$$x = 5 + m.$$

Ainsi toutes les valeurs entières et positives de x, y et z, correspondront

aux hypothèses.....	$m = -1$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	
pour lesquels on aura	$x = 4$ $y = 0$ $z = 1$	$= 5$ $= 3$ $= 6$	$= 6$ $= 6$ $= 11$	$= 7$ $= 9$ $= 16$	$= 8$ $= 12$ $= 21$	$= 9$ $= 15$ $= 26$	etc.

La solution $x = 4, y = 0, z = 1$, n'a pas été assignée par le *citoyen Dubourget* dans ses Élémens d'Algèbre que nous avons lus avec intérêt, et dont nous avons profité.

C'est dans l'analyse précédente que rentre la règle qu'on nomme *regula cœci*, au moyen de laquelle on détermine par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues.

121. On propose de trouver pour x et y tous les nombres rationnels qui peuvent satisfaire à l'équation

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0 \ldots\ldots (1),$$

ou à la suivante

$$ay^2+(bx+d)y=-cx^2-ex-f\ldots\ldots(2)$$

A cet effet, qu'on multiplie de part et d'autre par $4a$, puisqu'on ajoute aux deux membres $(bx+d)^2$, et on aura

$$4a^2y^2+4a(bx+d)y+(bx+d)^2=(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f),$$

dont le premier membre est un quarré parfait. En extrayant la racine quarrée de part et d'autre, il viendra

$$2ay+bx+d=\pm\sqrt{\{(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)\}},$$

ou

$$2ay+bx+d=\quad\sqrt{\{mx^2+nx+p\}},$$

en posant

$$b^2-4ac=m;\ 2bd-4ae=n;\ d^2-4af=p.$$

La question se réduit donc à trouver les valeurs de x qui rendront rationnel le radical $\sqrt{mx^2+nx+p}$. Soit

$$\sqrt{mx^2+nx+p}=u,$$

on aura

$$mx^2+nx=u^2-p;\ 4m^2x^2+4mnx+n^2=4mu^2-4mp+n^2,$$

d'où l'on déduit

$$2mx+n=\pm\sqrt{4mu^2-4mp+u^2};$$

et il ne s'agira plus, en posant

$$h=4m;\ i=u^2-4mp;$$

que de rendre rationnelle la quantité radicale $\sqrt{hu^2+i}$. Si le binome hu^2+i peut être décomposé en facteurs $qu+r$, $su+t$, tels que

$$h=qs,\quad i=rt,\quad qt+rs=0,$$

on fera

$$(qu+r)(su+t)=(qu+r)^2z^2,$$

d'où résultent

$$u=\frac{rz^2-t}{s-qz^2};\ uq+r=\frac{rs-qt}{s-qz^2};\ su+t=z^2\times\frac{rs-qt}{s-qz^2};$$

par conséquent

$$(qu+r)(su+t)=z^2\left(\frac{rs-qt}{s-qz^2}\right)^2;$$

donc

$$\sqrt{hu^2+i}=z\times\frac{rs-qt}{s-qz^2},$$

quantité rationnelle, si r, q, s et t sont pareillement des quantités rationnelles.

Si m étant positif, on a

$$n^2>4mp,$$

les deux facteurs de hu^2+i deviennent imaginaires ; mais, dans ce cas, ceux de mx^2+nx+p sont réels, et si on les représente par $q'x+r'$, $s'x+t'$, en prenant

$$x=\frac{r'z^2-t'^2}{s'-q'z^2},$$

on aura, d'après ce qui a été trouvé précédemment,

$$\sqrt{mx^2+nx+p}=z\times\frac{r's'-q't'}{s'-q'z^2}.$$

Supposons que le trinome, sous le radical, soit $6x^2+31x+35$, dont les deux facteurs sont $3x+5$, $2x+7$; donc

$$q'=3,\ r'=5,\ s'=2,\ t'=7;$$

conséquemment on a

$$\sqrt{6x^2+31x+35}=\frac{11z}{3z^2-2}.$$

Si le trinome était $9x^2 + 30x + 74$, dont les deux facteurs sont imaginaires, on aurait

$$m = 9, \quad n = 30, \quad p = 74;$$

d'où

$$h = 36, \; i = -1764 = -(42)^2.$$

Les deux facteurs de $36u^2 - (42)^2$ seraient $6u - 42$ et $6u + 42$; donc

$$q = s = 6, \; r = -42, \; t = 42$$

$$u = 7 \cdot \frac{z^2+1}{z^2-1}; \quad \sqrt{36u^2 - (42)^2} = \frac{84z}{z^2-1};$$

partant

$$18x + 30 = \frac{84z}{z^2-1}; \; x = \frac{14z}{3(z^2-1)} - \frac{5}{3}$$

$$9x^2 + 30x + 74 = 49\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2,$$

dont la racine quarrée serait $7 \times \frac{z^2+1}{z^2-1}$.

122. Proposons-nous de trouver pour x tous les nombres entiers, tels que le trinome $mx^2 + nx + p$ devienne un quarré parfait : on peut supposer

$$mx^2 + nx + p = zz \ldots\ldots (1);$$

et si on représente l'un des nombres en question par f, on aura aussi

$$mf^2 + nf + p = gg \ldots\ldots (2)$$

Retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$m(x^2 - f^2) + n(x - f) = zz - gg,$$

ou

$$\frac{m(x+f) + n}{z+g} = \frac{z-g}{x-f}.$$

Soit

$$\frac{m(x+f)+n}{z+g}=\frac{B}{A}, \text{ on aura } \frac{z-g}{x-f}=\frac{B}{A};$$

partant

$$z+g=\frac{A}{B}[m(x+f)+n]; z-g=\frac{B}{A}(x-f);$$

ôtant la seconde équation de la première, on trouve pour différence

$$2gAB=(mA^2-B^2)x+(mA^2+B^2)f+nA^2,$$

et conséquemment

$$x=\frac{2gAB-(mA^2+B^2)f-nA^2}{mA^2-B^2}$$

$$z=\frac{g(mA^2+B^2)-AB(2mf+n)}{mA^2-B^2}.$$

Pour avoir les valeurs de x et de z en nombres entiers, la supposition la plus simple est, 1°. $mA^2-B^2=1$, à laquelle correspondent

$$x=2gAB-(mA^2+B^2)f-nA^2$$
$$z=g(mA^2+B^2)-AB(2mf+n);$$

2°. $mA^2-B^2=-1$, pour laquelle on a

$$x=nA^2+(mA^2+B^2)f-2gAB$$
$$z=AB(2mf+n)-g(mA^2+B^2).$$

La question est donc ramenée à celle de trouver pour A deux nombres entiers propres à rendre mA^2-1 et mA^2+1 des quarrés parfaits, parce que les conditions 1°. et 2°. donnent

$$mA^2-1=B^2;\ mA^2+1=B^2.$$

Prenons, pour exemple, le trinome

$$5x^2+7x-8,$$

qu'il s'agit de rendre un quarré parfait en nombres entiers; on aura

$$m=5,\ n=7,\ p=-8,$$

et les deux conditions

$$5A^2-1=B^2;\ 5A^2+1=B^2,$$

auxquelles il faut satisfaire en nombres entiers. Pour la seconde $A=4$, donne

$$5A^2+1=81.$$

Ainsi

$$B=9,\ mA^2+B^2=161,\ nA^2=112,\ AB=36.$$

De ces valeurs résultent

$$(3)\ x=112+161f-72g;\ z=36(10f+7)-161g\ldots(4);$$

mais à l'égard du trinome proposé, on reconnaît, après avoir essayé quelques nombres pris tant en plus qu'en moins, que la substitution de 4 au lieu de x, donne

$$5x^2+7x-8=100;$$

on prendra donc 4 pour f et 10 pour g, d'après (2), et on aura

$$x=36,\ \ z=82.$$

Ces valeurs de x et de z, substituées pour f et g dans les formules (3) et (4), donneront

$$x=4,\ \ z=1.$$

Nous ne trouvons jusqu'ici que les nombres 4 et 36 qui, substitués pour x, rendent le trinome proposé un quarré parfait. Mais il est permis, d'après l'énoncé, de prendre g négative-

ment, et de poser

$$x=112+161f+72g\,;\ y=36\,(10f+7+161g,$$

formules dans lesquelles on écrira d'abord pour f et g les nombres 4 et 10, qui donnent

$$x=1476\,;\ z=3302.$$

Ces valeurs de x et z, écrites pour f et g dans les formules précédentes, conduiront à

$$x=475492\,;\ z=1068234.$$

En continuant de la même manière, on trouvera une infinité de nombres entiers propres à rendre le trinome un quarré parfait.

On rendra $5A^2-1$ un quarré, en prenant $A=1$, ce qui donne

$$B=2,\ mA^2+B^2=9,\ nA^2=7,\ AB=2,$$

valeurs auxquelles correspondront les formules

$$x=4g-9f-7,\ z=9g-2\,(10f+7)$$

dans lesquelles on écrira d'abord, pour f et g, les nombres 4 et 10, et on aura

$$x=-3,\ z=-4.$$

Ces valeurs de x et de z, reportées pour f et g dans les mêmes formules, fourniront

$$x=4,\ z=10\,;$$

mais en prenant g avec le signe $-$, on a

$$x=-4g-9f-7\,;\ z=-9g-2\,(10f+7),$$

qui, pour $f=-3$ et $g=-4$, donnent

$x=$

$$x = 36,\ z = 82.$$

Les nombres 36 et 82, substitués pour f et g dans les formules, donnent

$$x = -659,\ z = -1472,$$

et on trouve de cette manière une autre série de nombres entiers qui résolvent la question proposée.

123. Proposons-nous encore de trouver les plus petits nombres entiers qui, substitués pour x et pour y, rendront la quantité

$$Ax^n + Byx^{n-1} + Cy^2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + Ny^n \ldots\ldots (1),$$

la plus petite possible, A, B, C, etc. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Si l'on désigne par a, a', a'', etc. les racines réelles, et par $r \pm s\sqrt{-1}$, $r' \pm s'\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires de l'équation

$$Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + N = 0 \ldots\ldots (2),$$

le polynome proposé pourra se mettre sous la forme

$$A(x-ay)(x-a'y)\ldots.[(x-ry)^2+s^2y^2][(x-r'y)^2+s'^2], \text{ etc.}$$

ce qui résulte de l'hypothèse $x = yz$, dans (1); ensorte qu'égalant à zéro et divisant par y, on tombe sur (2), dont les facteurs sont, par hypothèse, $z-a$, $z-a'$, etc.; la question se réduit donc à faire ensorte que le produit précédent soit le plus petit possible. Que p et q soient des valeurs de x et de y correspondantes au *minimum*, ou à la plus petite valeur du produit, et qu'on prenne pour x et pour y des valeurs plus petites, il faudra que le produit devienne plus grand; autrement, pour $p = x$ et $q = y$, il ne serait pas le plus petit possible; il faudra donc que quelqu'un de ses facteurs augmente de valeur. Or si a, par exemple, est une quantité négative, le facteur $p - aq$ diminuera par p et par q; et, dans le même cas, le facteur $(p - rq)^2 + s^2y^2$ diminuera si r est un

nombre négatif. Donc les seuls facteurs qui puissent croître lorsque p et q diminuent, sont ceux qui correspondent aux racines réelles positives, ou aux racines imaginaires qui ont la partie réelle positive; et, par rapport à ces derniers, il est clair que leur accroissement ne dépend que de la partie $p-rq$, puisque s^2q^2 diminue avec q. Ainsi, dans le cas du *minimum*, les valeurs de p et de q doivent être telles, que p et q venant à diminuer, la quantité $p-aq$ augmente, en prenant successivement pour a toutes les racines réelles positives, et les parties réelles positives des racines imaginaires de l'équation (2). De là résulte que $\frac{p}{q}$ sera l'une des fractions convergentes vers a : on réduira donc en fractions continues toutes ces racines a; et ayant formé les fractions convergentes vers chacune des valeurs a, on prendra pour p successivement chacun des numérateurs, et pour q le dénominateur correspondant, puis pour x et y; celui des systèmes de valeurs de p et q, auquel correspond la plus valeur de la fonction proposée. On observera que la fraction $\frac{1}{0}$ ayant même propriété que chacune des fractions convergentes vers a, on doit en tenir compte dans la recherche du *minimum*, c'est-à-dire, qu'il faudra essayer $p=1$, $q=0$.

Que n soit pair ou impair, il n'importe quels signes on donne aux nombres p et q, lorsqu'on les suppose de même signe, puisqu'il ne résulte alors aucun changement dans la valeur absolue de la formule proposée. Mais si l'on donne à p et q des signes différens, les termes alternatifs de la proposée viendront à changer de signes, ce qui en fera changer aux racines, de sorte que telles d'entre elles qui étaient négatives et par conséquent inutiles dans le premier cas, deviendront positives dans celui-ci et devront être employées. Généralement donc, s'il n'y a d'autre restriction par rapport aux nombres p, et q, sinon qu'ils soient entiers, on prendra pour a toutes les racines réelles, et toutes les parties réelles des racines imaginaires, et on donnera à p et à q même signe ou des signes différens, suivant que le nombre a sur lequel on opère sera, originairement, positif ou négatif.

124. Faisons une application de ces principes à la recherche du *minimum* des fonctions du second degré, telles que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2:$$

les racines de l'équation

$$Az^2 + Bz + C = 0,$$

sont exprimées par

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

et ici il convient de distinguer trois cas : 1°. si $B^2 - 4AC$ est un quarré, les racines seront rationnelles, et la formule $Ap^2 + Bpq + C^2$ deviendra zéro, en prenant pour $\frac{p}{q}$ l'une ou l'autre de ces racines ; donc zéro sera le *minimum* de la formule proposée, ou, à proprement parler, il n'y aura pas de *minimum*. Effectivement, la substitution de $\frac{p}{q}$ pour z donne

$$A\frac{p^2}{q^2} + B\frac{p}{q} + C = 0;$$

et comme $x = yz = y\frac{p}{q}$, on a, par la substitution de cette valeur de x dans la proposée,

$$Ay^2\frac{p^2}{q^2} + By^2\frac{p}{q} + Cy^2 = y^2\left(A\frac{p^2}{q^2} + B\frac{p}{q} + C\right) = 0.$$

2°. Si $B^2 - 4AC$ est une quantité négative, les racines seront imaginaires ; on convertira donc en fraction continue la partie réelle $-\frac{B}{2A}$, qu'on prendra pour a ; et ayant formé les fractions convergentes, on prendra pour p les numérateurs, et pour q les dénominateurs, en observant de donner à p et à q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que cette fraction $-\frac{B}{2A}$ sera positive ou négative. Le système de valeurs

de p et de q, qui donnera la plus petite valeur de la formule proposée, correspondra au *minimum* cherché. 3°. Si B^2-4AC est une quantité positive, qui ne soit pas un quarré, il faudra convertir en fraction continue la formule $\frac{\mp B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, en prenant pour la racine positive le radical avec un tel signe que la quantité soit positive, auquel cas p et q auront même signe. Le signe inférieur de B indiquera une racine négative, et alors les nombres p et q seront pris avec des signes différens, ainsi qu'il a été dit précédemment. A cet effet, on exécutera le calcul qui suit, où $D=B^2-4AC$

$$\mp B, \qquad A, \qquad \lambda<\frac{\mp B\pm\sqrt{D}}{2A},$$

$$B'=2A\lambda\mp B, \quad A'=\frac{B'^2-D}{4A}, \quad \lambda'<\frac{-B'\mp\sqrt{D}}{2A'},$$

$$B''=2A'\lambda'+B', \quad A''=\frac{B''^2-D}{4A''}, \quad \lambda''<\frac{-B'\pm\sqrt{D}}{2A''},$$

etc. etc. etc.

jusqu'à ce qu'on obtienne (n° 24)

$$A^{(n+\mu)}=A^{(n)};\ B^{(n+\mu)}=B^{(n)},$$

parce qu'à partir de là, les mêmes nombres se reproduiront et dans le même ordre. La fraction cherchée sera $\lambda+\frac{1}{\lambda'+\frac{1}{\lambda''+\frac{1}{\lambda'''+\text{etc.}}}}$

Si l'on forme les fractions convergentes $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{6}{6'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, etc. et qu'on en prenne les numérateurs pour p, et les dénominateurs pour q, celui des systèmes de valeurs de p et de q, qui donnera la plus petite valeur de la proposée, résoudra la question. Nous avons vu (n° 24), que les quantités A', A'', etc. sont exprimées ainsi qu'il suit :

$$A' = A\lambda^2 + B\lambda + C$$
$$A'' = A'\lambda'^2 + B'\lambda' + A$$
$$A''' = A''\lambda''^2 + B''\lambda'' + A',$$
etc.

Mais pour les substitutions

$$z = \lambda + \frac{1}{z'};\ z' = \lambda' + \frac{1}{z''};\ z'' = \lambda'' + \frac{1}{z'''}, \text{ etc.}$$

l'équation

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

donne les transformées

$$A'z'^2 + B'z' + A = 0$$
$$A''z''^2 + B''z'' + A' = 0$$
$$A'''z'''^3 + B'''z''' + A'' = 0,$$
etc.

Donc A' est ce que devient $Az^2 + Bz + C$, lorsque pour z on y écrit λ, A'' ce que devient $A'z'^2 + B'z' + A$, après la substitution de λ' pour z', etc.; ou bien encore ce que devient $Az^2 + Bz + C$, en y remplaçant z par $\lambda + \frac{1}{\lambda'} = \frac{\beta}{\beta'}$, et faisant disparaître le dénominateur. De même A''' est ce que devient $A''z''^2 + B''z'' + A'$, quand on remplace z'' par λ'', ou ce que devient $Az^2 + Bz + C$, quand on fait $z = \lambda + \cfrac{1}{\lambda' + \cfrac{1}{\lambda''}}$, et qu'on fait disparaître les fractions, et ainsi de suite. On aura donc

$$A' = A\alpha^2 + B\alpha\alpha' + C\alpha'^2$$
$$A'' = A\beta^2 + B\beta\beta' + C\beta'^2$$
$$A''' = A\gamma^2 + B\gamma\gamma' + C\gamma'^2;$$

ensorte que les valeurs A', A'', etc. seront celles de la fonction $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, lorsqu'au lieu de x et de y, on prend

les numérateurs et les dénominateurs des fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{6}{6'}, \frac{\gamma}{\gamma'}$ etc. Conséquemment le plus petit des nombres A, A', A'', etc. sera le *minimum* cherché.

Qu'on ait à chercher le *minimum* de

$$7x^2 + 22xy + 20y^2,$$

on aura

$$A = 7, B = 22, C = 20, B^2 - 4AC = -76,$$

ainsi le radical est imaginaire. On réduira donc en fraction continue la fraction $-\frac{B}{2A} = -\frac{11}{7}$, pour laquelle on trouvera cette suite de dénominateurs 1, 1, 1, 3, desquels on déduira les fractions convergentes

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{11}{7},$$

et comme la fraction $\frac{B}{2A}$ est précédée du signe $-$, on devra essayer

$$\text{pour} \left\{ \begin{array}{l} p, \\ q, \end{array} \right. \text{les nombres} \left\{ \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 11 \\ -1, & -1, & -2, & -7 \end{array} \right\}$$

Si l'on désigne par R les résultats de la fonction proposée, correspondans à ces systèmes de valeurs de p et de q, on trouvera

p	q	R
1	0	7
1	−1	5
2	−1	4
3	−2	11
11	−7	133.

Le plus petit résultat R, qui est 4, correspond aux valeurs $p=2$, $q=-1$.

Pour la quantité

$$49x^2-238xy+290y^2,$$

on a

$$A=49,\ B=-238,\ C=290,$$

$$B^2-4AC=-196,\ -\frac{B}{2A}=\frac{238}{98}=\frac{17}{7},$$

d'où résultent ces fractions convergentes vers $\frac{17}{7}$,

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{17}{7}.$$

(indices au-dessus : 2, 2, 3)

Desorte que les nombres à essayer, et les résultats correspondans, sont

p	q	R
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49.

On peut donc conclure, en général, que la formule proposée ne deviendra jamais plus petite que 5, p et q étant des nombres entiers; desorte que le *minimum* de la formule correspondra à $p=5$ et $q=2$.

Faisons une autre application de cette théorie à la fonction

$$8x^2-117xy+426y^2,$$

pour laquelle on a

$$A=8,\ B=-117,\ \sqrt{B^2-4AC}=\sqrt{D}=\sqrt{57};$$

ensorte que nous aurons à convertir en fraction continue la

fraction ordinaire $\frac{\pm 117 \pm \sqrt{57}}{16}$. Nous prendrons d'abord $\sqrt{57}$ avec le signe $+$, et 117 avec le signe supérieur, afin d'avoir une quantité positive, puis nous ferons le calcul suivant

$$B = -117, \quad A = 8, \quad \lambda < \frac{117 + \sqrt{57}}{16} = 7,$$

$$B' = 112 - 117 = -5, \; A' = \frac{25-57}{32} = -1, \; \lambda' < \frac{5 - \sqrt{5}}{-2} = 1,$$

$$B'' = -2 - 5 = -7, \; A'' = \frac{49-57}{-4} = 2, \; \lambda'' < \frac{7 + \sqrt{57}}{4} = 3,$$

$$B''' = 12 - 7 = 5, \quad A''' = \frac{25-57}{8} = -4, \; \lambda''' < \frac{-5 - \sqrt{57}}{-8} = 1,$$

$$B^{\text{IV}} = -8 + 5 = -3, \; A^{\text{IV}} = \frac{9-57}{-16} = 3, \; \lambda^{\text{IV}} < \frac{3 + \sqrt{57}}{6} = 1,$$

$$B^{\text{V}} = 6 - 3 = 3, \quad A^{\text{V}} = \frac{9-57}{12} = -4, \; \lambda^{\text{V}} < \frac{-3 - \sqrt{57}}{-8} = 1,$$

$$B^{\text{VI}} = -8 + 3 = -5, \; A^{\text{VI}} = \frac{25-57}{-16} = 2, \; \lambda^{\text{VI}} < \frac{5 + \sqrt{57}}{4} = 3,$$

$$B^{\text{VII}} = 12 - 5 = 7, \quad A^{\text{VII}} = \frac{49-57}{8} = -1, \; \lambda^{\text{VII}} < \frac{-7 - \sqrt{57}}{-2} = 7,$$

$$B^{\text{VIII}} = -14 + 7 = -7, \; A^{\text{VIII}} = \frac{49-57}{-4} = 2;$$

et comme nous avons trouvé $B^{\text{VIII}} = B''$; $A^{\text{VIII}} = A''$, nous sommes assurés que les mêmes nombres se reproduiront dans le même ordre.

En prenant $\sqrt{57}$ avec le signe inférieur, nous aurons le tableau suivant ;

$B = -117, \quad A = 8, \quad \lambda < \frac{117-\sqrt{57}}{16} = 6,$

$B' = 96-117 = -21, \quad A' = \frac{441-57}{32} = 12 \quad \lambda' < \frac{21+\sqrt{57}}{24} = 1,$

$B'' = 24-21 = 3, \quad A'' = \frac{9-57}{48} = -1, \quad \lambda'' < \frac{-3-\sqrt{57}}{-2} = 5,$

$B''' = -10+3 = -7, \quad A''' = \frac{49-57}{-4} = 2, \quad \lambda''' < \frac{7+\sqrt{57}}{4} = 3,$

$B^{\text{iv}} = 12-7 = 5, \quad A^{\text{iv}} = \frac{25-57}{8} = -4, \quad \lambda^{\text{iv}} < \frac{-5-\sqrt{57}}{-8} = 1,$

$B^{\text{v}} = -8+5 = -3, \quad A^{\text{v}} = \frac{9-57}{-16} = 3, \quad \lambda^{\text{v}} < \frac{3+\sqrt{57}}{6} = 1,$

$B^{\text{vi}} = 6-3 = 3, \quad A^{\text{vi}} = \frac{9-57}{12} = -4, \quad \lambda^{\text{vi}} < \frac{-3-\sqrt{57}}{-8} = 1,$

$B^{\text{vii}} = -8+3 = -5, \quad A^{\text{vii}} = \frac{25-57}{-16} = 2, \quad \lambda^{\text{vii}} < \frac{5+\sqrt{57}}{4} = 3,$

$B^{\text{viii}} = 12-5 = 7, \quad A^{\text{viii}} = \frac{49-57}{8} = -1, \quad \lambda^{\text{viii}} < \frac{-7-\sqrt{57}}{-2} = 7,$

$B^{\text{ix}} = -14+7 = -7, \quad A^{\text{ix}} = \frac{49-57}{-4} = 2.$

Des valeurs de A, A', etc. trouvées dans les deux cas, la plus petite est -1, laquelle est dans la première série la valeur de A', et dans la seconde, celle de A''. Ainsi -1 est le *minimum* de la fonction proposée ; et, pour trouver les valeurs correspondantes de x et de y, ou de p et q, nous prendrons, dans le premier cas, $\lambda = 7$, ensorte que les valeurs cherchées seront x ou $p = 7$, y ou $q = 1$. Dans le second cas, nous prendrons les nombres λ et λ', c'est-à-dire 6 et 1 ; et formant les fractions convergentes $\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, on déduira de la dernière qui correspond à A'', les valeurs $x = p = 7$ et $y = q = 1$, qui sont les mêmes que celles trouvées précédem-

ment. Nous pourrons encore, dans le premier cas, prendre pour $\frac{x}{y}$ les fractions convergentes qui correspondent à A^{VII}, à A^{XIII}, etc.; et dans le second, celles qui correspondent à A^{VIII}, à A^{XIV}, etc. Le plus petit résultat en nombre entier et positif de la proposée est, dans les deux cas, $= 2$.

Il existe une formule générale qui comprend toutes ces valeurs de x et de y, propre à résoudre la question proposée. Mais ceux qui desireraient plus de détails sur cette matière, peuvent consulter la Théorie des nombres, par *Legendre*; les Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1767 et 1768, et le deuxième volume de l'Algèbre d'*Euler*, où ils trouveront la résolution en nombres entiers, déduite de ces principes, de la formule $Ax^2 + B = y^2$.

CHAPITRE XXIV.

De quelques artifices de calcul, propres à rendre rationnelle une fonction irrationnelle de x.

125. POUR qu'on saisisse mieux l'esprit des artifices de calcul dont nous allons faire usage et que nous avons déjà employés dans le chapitre précédent, nous les répéterons sur un assez grand nombre d'exemples que nous aurons soin de varier.

Dans les fonctions que nous allons considérer, x n'est plus la représentation d'une inconnue qui doive admettre un nombre limité de valeurs; c'est une quantité qui varie, sans restriction, comme l'abscisse d'une courbe.

Supposons, pour commencer par un exemple simple, qu'on veuille rendre rationnelle la fonction de x, que nous désignerons toujours par fx,

$$fx = \frac{1}{(q - rx)\sqrt{2\varphi x}};$$

on supposera à cet effet

$$x = y^2,$$

et on aura par la substitution, une transformée rationnelle en y.

$$fy = \frac{1}{(q - ry^2)y\sqrt{2\varphi}}.$$

Soit, en second lieu, la fonction rationnelle

$$fx = \frac{1}{\sqrt{1 + xx}},$$

on apperçoit facilement que de l'hypothèse

$$\sqrt{1 + xx} = 1 + xz,$$

on pourra déduire x d'une manière rationnelle en z, puisqu'après avoir élevé de part et d'autre au quarré, effacé l'unité, et divisé les deux membres par x, on aura une équation du premier degré en x. Cette valeur de x, substituée dans $1 + xz$, donne un résultat rationnel, ensorte que la transformée en z de fx ne renfermera plus de radical. On tire de l'hypothèse précédente

$$(1 + xx) = 1 + 2xz + x^2z^2,$$

d'où résulte

$$x = \frac{2z}{1 - zz}, \text{ et } 1 + xz = \frac{1 + z^2}{1 - z^2};$$

donc

$$fz = \frac{1 + zz}{1 - zz} = -\frac{zz + 1}{zz - 1}.$$

Pour rendre rationnelle la fonction

$$fx = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$$

on posera encore

$$\sqrt{1-xx} = 1 + xz, \text{ d'où } 1 - xx = 1 + 2xz + x^2z^2$$

et conséquemment

$$x = -\frac{2z}{1+zz}; \quad 1 + xz = \frac{1-zz}{1+zz},$$

d'où résulte conséquemment

$$fz = \frac{1+zz}{1-zz} = -\frac{zz+1}{zz-1}.$$

Dans le cas plus général de

$$fx = \frac{X}{\sqrt{1+xx}},$$

X étant une fonction rationnelle de x, la même hypothèse que ci-dessus donnera encore une transformée rationnelle en z. Il en serait de même à l'égard de

$$fx = X\sqrt{1+xx}.$$

On sait encore, d'après ce qui précède, rendre rationnelles les fonctions

$$fx = \frac{X}{\sqrt{1-xx}}; \quad fx = X\sqrt{1+xx}.$$

Soit la fonction

$$fx = \frac{X}{\sqrt{xx-1}}:$$

X ayant même définition que ci-dessus : on posera, à l'effet

de la rendre rationnelle,

$$\sqrt{xx-1}=x+z,\ \text{d'où}\ -1=2xz+z^2:$$

la valeur déduite de là pour x est rationnelle en z, et conséquemment la transformée en z le sera pareillement.

Pour rendre rationnelle la fonction fractionnaire

$$fx=\frac{1}{\sqrt{1+xx}-\sqrt{1-xx}};$$

on multipliera d'abord haut et bas par $\sqrt{1+xx}+\sqrt{1-xx}$, ce qui donnera les deux fractions

$$fx=\frac{\sqrt{1+xx}}{2xx}+\frac{\sqrt{1-xx}}{2x^2}$$

sur chacune desquelles on opérera en particulier.

La fonction

$$fx=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

sera débarrassée des radicaux qu'elle contient, par l'hypothèse $1+x=z^6$, d'où $x=z^6-1$, $\sqrt[3]{1+x}=z^2$, $\sqrt{1+x}=z^3$.

Proposons-nous la même question à l'égard des fonctions irrationnelles

$$X\sqrt{a+bx+cxx};\quad \frac{X}{\sqrt{a+bx+cxx}}:$$

X étant une fonction rationnelle de x. Il suffira de considérer la première

$$fx=X\sqrt{a+bx+cxx}:$$

on cherchera les deux facteurs de $a+bx+cxx$; s'ils sont réels, on aura

$$\sqrt{a+bx+cxx} = \sqrt{(m+nx)(p+qx)}:$$

supposant donc

$$\sqrt{(m+nx)(p+qx)} = (m+nx)z,$$

on aura, en élevant de part et d'autre au quarré, puis divisant par $m+nx$,

$$p+qx=(m+nx)zz, \text{ d'où } x=\frac{p-mzz}{nzz-q}$$

$$(m+nx)z=\frac{(np-mq)z}{nzz-q}.$$

Ces valeurs substituées dans l'une ou l'autre des fonctions données, la rendront rationnelle.

Ainsi, par exemple, la fonction irrationnelle

$$fx=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

sera transformée en une fonction rationnelle, par l'hypothèse

$$\sqrt{xx-aa}=(x-a)z,$$

parce qu'après avoir élevé de part et d'autre au quarré, et divisé par $x-a$, on sera conduit à une équation du premier degré en x, de laquelle on déduira x d'une manière rationnelle en z, ensorte que substituant cette valeur de x dans $(x-a)z$, on aura fz rationnelle. Il en serait de même de

$$fx=\frac{X}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

X étant une fonction rationnelle en x.

Lorsque dans

$$fx=X\sqrt{a+bx+cx^2};\ fx=\frac{X}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

les facteurs de $a+bx+cx^2$ sont imaginaires, il faut faire évanouir le second terme du trinome, en posant

$$x+\frac{b}{2c}=z,$$

et alors on a

$$X\sqrt{a+bx+cx^2}=Z\sqrt{zz+b'b'}$$

$$\frac{X}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{Z}{\sqrt{zz+b'b'}}.$$

Soit maintenant

$$\sqrt{zz+b'b'}=z+u,$$

on aura

$$\frac{b'b'-uu}{2u}=z;\ \sqrt{zz+b'b'}=\frac{b'b'+uu}{2u},$$

et Z se changera dans une fonction rationnelle de u, que nous désignerons par U, ensorte que l'une et l'autre des fonctions de x, deviendront rationnelles en u.

Quels que soient au reste les facteurs du dénominateur trinome $a+bx+cxx$, on peut toujours rendre rationnelle la fonction

$$fx=\frac{X}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$fx=\frac{X}{\delta\sqrt{\alpha+\beta x+xx}},$$

en posant

$$\delta=\sqrt{c};\ \alpha=\frac{a}{c},\ \beta=\frac{b}{c};$$

car faisant

$$\sqrt{a+\beta x+xx}=x+z,$$

on obtient

$$x=\frac{a-zz}{2z-\beta} : \delta\sqrt{a+\beta x+xx}=\delta\left(\frac{a-\beta z+zz}{2z-\beta}\right),$$

ensorte que fx devient, par ces substitutions, une fonction rationnelle de z.

La fonction

$$fx=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

dans laquelle on doit avoir

$$x>a, \text{ et } x<b$$

sera rendue rationnelle par l'hypothèse

$$\frac{x-a}{b-x}=zz, \text{ d'où } x=\frac{bzz+a}{1+zz};$$

et $$x-a=\frac{(b-a)zz}{1+zz}; \; b-x=\frac{b-a}{1+zz}.$$

Nous terminerons par une fonction irrationnelle assez compliquée

$$fx=\frac{\{\beta x+\sqrt{b^2+\pi^2x^2}\}xx}{\{\gamma x-\sqrt{b^2+\pi^2x^2}\}\sqrt{b^2+\pi^2x^2}};$$

on la rendra rationnelle, en posant

$$\sqrt{b^2+\pi^2x^2}=\pi x+u, \text{ d'où } x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{b^2-u^2}{u}$$

$$x^2=\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{(b^2-u^2)^2}{u}; \; \sqrt{b^2+\pi^2x^2}=\frac{b^2+u^2}{2u}.$$

126. Tout ce qui a été dit sous ce titre que nous restreindrons

drons à ce qui précède, trouvera son application par la suite, ainsi qu'on le verra dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral*, que nous nous proposons de publier incessamment.

CHAPITRE XXV.

Formules diverses.

127. SUPPOSONS $b < a$, et posons

$$\tang x = \sqrt{\frac{b}{a}};\quad \sin z = \sqrt{\frac{b}{a}};\quad \text{séc}\, y = \frac{a}{b};$$

$$\tang u = \frac{b}{a};\quad \sin t = \frac{b}{a},$$

b et a étant des nombres donnés ; on trouvera par les tables les angles x, z, y, u et t, et on aura

$$(1^\circ.)\ldots\log(a+b) = \log a\left(1+\frac{b}{a}\right) = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$= \log a + \log(1+\tang^2 x) = \log a + \log.\text{séc}^2 x$$

$$= \log a + 2\log.\text{séc}\, x.$$

$$(2^\circ.)\ldots\log(a+b) = \log\left\{2a\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\right)\right\} = \log 2a\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y\right)$$

$$= \log\left\{2a\cos^2\tfrac{1}{2}y\right\} = \log a + \log 2 + 2\log.\cos\tfrac{1}{2}y,$$

en observant que, pour le rayon $= 1$, on a (*Legendre*, page 344)

$$\cos\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y\right\}};$$

$$(3^\circ.)\ldots\log(a+b) = \log b\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}\right) = \log.\, b\left(\frac{1+\cos y}{\cos y}\right)$$

$$= \log.b\left(\frac{\text{tang}\,y}{\text{tang}\,\frac{1}{2}y}\right) = \log b + \log.\text{tang}\,y - \log.\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y,$$

en observant qu'on a (*Legendre*, page 331)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y = \frac{\sin y}{1 + \cos y}.$$

Il sera très-facile, d'après ce que nous venons de dire, de parvenir aux formules suivantes :

(4°.) .... $\log(a-b) = \log a + 2\log.\cos z$

(5°.) .... $\log(a-b) = \log a + \log 2 + 2\log.\sin\tfrac{1}{2}y$

(6°.) .... $\log(a-b) = \log b + \log.\text{tang}\,y + \log.\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y$

On aura

(7°.) ... $\log[(a+b)(a-b)] = \log(a^2 - b^2) = \log a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$

$$= \log a^2(1 - \cos^2 y) = 2\log a + 2\log.\sin y;$$

(8°.) ... $\log[(a+b)(a-b)] = \log(a^2 - b^2) = \log b^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)$

$$= \log b^2(\text{séc}^2 y - 1) = 2\log b + \log.\text{tang}^2 y$$
$$= 2\log b + 2\log.\text{tang}\,y;$$

(9°.) ... $\log\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \log\left(\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}\right) = \log\left(\frac{\frac{1}{\text{tang}\,u} - 1}{\frac{1}{\text{tang}\,u} + 1}\right)$

$$= \log\left(\frac{1 - \text{tang}\,u}{1 + \text{tang}\,u}\right) = \log.\text{tang}\,(50^\circ - u),$$

le quart de cercle étant supposé divisé en 100 parties ou degrés, le degré en 100 minutes, et la minute en 100 secondes.

$$(10^{\circ}.)\ldots\log\left(\frac{a-b}{a+b}\right)=\log\left(\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\right)=\log\left(\frac{1-\frac{1}{\text{séc}\,y}}{1+\frac{1}{\text{séc}\,y}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1-\cos y}{1+\cos y}\right)=\log.\text{tang}^2\tfrac{1}{2}y=2\log.\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y,$$

en observant qu'on a (*Legendre*, page 351), et en supposant toujours le rayon $=1$;

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y=\frac{\sin y}{1+\cos y};\quad \cot\tfrac{1}{2}y=\frac{\sin y}{1-\cos y}$$

$$(11^{\circ}.)\ldots\log\sqrt{a^2-b^2}=\log a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\log a\sqrt{1-\frac{1}{\text{séc}^2 y}}$$

$$=\log a\sqrt{1-\cos^2 y}=\log a+\log.\sin y;$$

$$(12^{\circ}.)\ldots\log\sqrt{a^2-b^2}=\log b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}=\log b\sqrt{\text{séc}^2 y-1}$$

$$=\log b+\log.\text{tang}\,y.$$

On découvrira facilement ces deux transformations

$$(13^{\circ}.)\ldots\ldots\log\sqrt{a^2+b^2}=\log a+\log.\text{séc}\,u;$$

$$(14^{\circ}.)\ldots\ldots\log\sqrt{a^2+b^2}=\log b+\log.\text{cosec}\,u.$$

On aura,

$$(15^{\circ}.)\ldots\ldots\log\sqrt{a+b}=\log\sqrt{a}\times\sqrt{1+\frac{b}{a}}$$

$$=\log\sqrt{a}\times\sqrt{1+\text{tang}^2 x}=\tfrac{1}{2}\log a+\log.\text{séc}\,x;$$

$$(16^{\circ}.)\ldots\ldots\log\sqrt{a+b}=\log\sqrt{a}\times\sqrt{1+\frac{b}{a}}$$

$$=\log a\times\sqrt{1+\frac{1}{\text{séc}\,y}}=\log\sqrt{a}\times\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y}$$

$$=\log\sqrt{2a}\times\cos\tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}\log a+\tfrac{1}{2}\log 2+\log.\cos\tfrac{1}{2}y.$$

On trouvera d'une manière analogue

$$(17°)\ldots\log\sqrt{a-b}=\tfrac{1}{2}\log a+\log.\cos z;$$

$$(18°)\ldots\log\sqrt{a-b}=\tfrac{1}{2}\log a+\tfrac{1}{2}\log 2+\log.\sin\tfrac{1}{2}y.$$

On aura

$$(19°.)\ldots\log(a+b)^{\frac{m}{n}}=\log a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}=\log a^{\frac{m}{n}}(1+\sin t)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+\sin t}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t)-(\frac{1}{2}-\cos t)}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+2\cos\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}t}{\cos^2\frac{1}{2}t-\sin^2\frac{1}{2}t}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}t+\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t+\sin\frac{1}{2}t}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}}{1+\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}(\text{tang}(50+\tfrac{1}{2}t))^{\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{m}{n}[\log a+\log.\cos t+\log\text{tang}(50+\tfrac{1}{2}t)].$$

On découvre de la même manière la formule,

$$(20°.)\ldots\log(a-b)=\frac{m}{n}[\log a+\log.\cos t+\log.\text{tang}(50°-\tfrac{1}{2}t)],$$

Qu'on pose maintenant

$$\frac{m}{n}\,\text{log.tang}\,(50^\circ - \tfrac{1}{2}t) = \text{log.tang}\,v,$$

et on aura

$$=\log[(a+b)^{\frac{m}{n}}+(a-b)^{\frac{m}{n}}]=\log(a-b)^{\frac{m}{n}}\left[1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\log\,(a-b)^{\frac{m}{n}}\left[1+\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\frac{m}{n}(\log a+\text{log.cos}t)+\text{log.tang}v+\log\left[1+\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\frac{m}{n}(\log a+\text{log.cos}t)+\text{log.tang}\,v+\log\left[1+\frac{1}{\text{tang}\,v^2}\right],$$

en observant que

$$\frac{1+\sin t}{1+\sin t}=\frac{1}{\text{tang}^2(510^\circ-t)},$$

(*Cagnoli*, Trig. Tabl. 2^{ime}; form. 9^{ime}); d'où résulte

$$\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\text{tang}^{\frac{2m}{n}}(50^\circ-t)}=\frac{1}{\text{tang}^2 v};$$

donc

$$\log\left[1+\frac{1}{\text{tang}^2 v}\right]=\left(\frac{\text{séc}^2 v}{\text{tang}^2 v}\right)=\text{log.tang}\,v+\log\left(\frac{\text{séc}^2 v}{\text{tang}v}\right)$$

$$=-\text{log.tang}v+\log^2\left(\frac{1}{2\cos v\sin v}\right)=-\text{log.tang}v+\log\left(\frac{2}{\sin 2v}\right)$$

$$=-\text{log.tang}\,v+\log 2\,\text{coséc}\,2\,v.$$

Donc enfin

$$(21^\circ.)\ldots\ldots \log\left\{(a+b)^{\frac{m}{n}}+(a-b)^{\frac{m}{n}}\right\}$$
$$=\frac{m}{n}(\log a+\log\cos t)+\log 2+\log.\operatorname{coséc} 2v.$$

On trouvera de la même manière

$$(22^\circ.)\ldots\ldots \log\left\{(a+b)^{\frac{m}{n}}-(a-b)^{\frac{m}{n}}\right\}$$
$$=\frac{m}{n}(\log a+\log.\cos t)+\log 2+\log.\cot 2v.$$

128. Nous avons donné ces transformations pour exercer les élèves au calcul trigonométrique avec lequel il est nécessaire de se familiariser; on reconnaîtra d'ailleurs que ces formules ont l'avantage de se prêter aux évaluations numériques et d'offrir, sous forme finie, les logarithmes de binomes élevés à des puissances fractionnaires, ce qui, dans plusieurs cas, favorise les réductions, ou donne lieu à des transformations utiles.

129. Soient X, Y, Z les trois arrêtes contigues à un même angle d'un parallélipipède rectangle et R la diagonale : on aura

$$R^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

si l'on représente par α, β et γ les angles de R avec X, Y et Z, les arrêtes X, Y et Z seront $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, et $R\cos\gamma$ et substituant dans R^2, on trouvera

$$R^2=R^2\{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\}$$

et divisant par R^2, on tombera sur cette propriété connue

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Puisqu'on a

$$\frac{X}{R}=\cos\alpha,\quad \frac{Y}{R}=\cos\beta,\quad \frac{Z}{R}=\cos\gamma;$$

si l'on désigne par x, y et z les trois coordonnées d'un point de la diagonale, comptées sur X, Y et Z, à partir de leur intersection, et par l la portion de cette diagonale comprise entre l'origine et le point qu'on considère, on aura aussi

$$\frac{x}{l}=\cos\alpha,\ \frac{y}{l}=\cos 6,\ \frac{z}{l}=\cos\gamma\,;$$

et pour une autre ligne menée par la même origine et dont la longueur est l',

$$\frac{x'}{l'}=\cos\lambda,\ \frac{y'}{l'}=\cos\mu,\ \frac{z'}{l'}=\cos\nu,$$

x', y', z', λ, μ et ν étant pour cette seconde ligne les analogues de x, y, z, α, 6 et γ : mais si l'on joint les extrémités de l et l' par une droite h, et que l'on désigne par θ l'angle de l avec l', on sait que

$$h^2=l^2+l'^2-2ll'\cos\theta$$
$$h^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

d'ailleurs

$$l^2=x^2+y^2+z^2;\ l'^2=x'^2+y'^2+z'^2;$$

donc

$$\cos\theta=\frac{xx'+yy'+zz'}{l.l'}=\frac{x}{l}\cdot\frac{x'}{l'}+\frac{y}{l}\cdot\frac{y'}{l'}+\frac{z}{l}\,\frac{z'}{l'},$$

conséquemment

$$\cos\theta=\cos\alpha\ \cos\lambda+\cos 6\ \cos\mu+\cos\gamma\ \cos\nu,$$

autre formule connue. Si les deux droites l et l' sont perpendiculaires l'une à l'autre, $\cos\theta=0$ et on a la condition

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos 6\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0.$$

La projection d'une droite R sur une autre droite faisant

avec la première un angle θ, est

$$R' = R\cos\theta = R\cos\alpha\cos\lambda + R\cos 6\cos\mu + R\cos\gamma\cos\nu;$$

donc

$$R' = X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu,$$

X, Y, Z étant les coordonnées de l'extrémité de R, c'est-à-dire, représentant la projection de la longueur R sur les trois axes rectangulaires, et alors $X\cos\lambda$, $Y\cos\mu$, $Z\cos\nu$ représentent les projections sur la ligne sur laquelle est prise R', des projections X, Y et Z. Ainsi pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'abord projeter sur trois axes rectangulaires, projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné et les ajouter.

CHAPITRE XXVI.

Démonstration de la règle pour former les racines des équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues.

130. NOUS avons donné (1re *sect. n° 225 et note sur ce n°*) la règle pour former les deux termes des fractions qui expriment les racines des équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues : nous pensons qu'on ne sera pas fâché d'en rencontrer ici la démonstration que nous donnerons telle qu'elle se trouve dans un mémoire de *Laplace*, portant pour titre : *Recherches sur le Calcul intégral et sur le Système du monde (Mémoires de l'Académie pour* 1772, 2e *partie).*

131. Je suppose que l'on ait entre les n inconnues μ, μ', μ'' etc. les n équations

$$0 = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'' + \text{etc.}$$
$$0 = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'' + \text{etc.}$$
$$0 = {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'' + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

les nombres 1, 2, 3 etc. placés à gauche des lettres a, b, c etc. étant ce que je nommerai dans la suite *indices* de ces lettres : on déterminera ainsi l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les coefficiens ${}^1a$, ${}^1b$, ${}^1c$ etc., ${}^2a$, ${}^2b$, ${}^2c$ etc., pour que les équations précédentes soient possibles.

Lorsque dans un produit tel que ${}^1d.{}^2c.{}^3b.{}^4a$ dont les indices suivent la loi des nombres naturels 1, 2, 3, 4, une lettre telle que b précède une autre lettre dont elle est précédée dans l'ordre de l'alphabet, j'appelle cela *variation*, et un terme a d'autant plus de ces variations que cela peut arriver de plus de manières : par exemple, dans le terme ${}^1d.{}^2c.{}^3b.{}^4a$, la lettre d précède c, b, a, dont elle est précédée dans l'ordre alphabétique, ce qui forme trois variations ; c précède b et a, ce qui donne deux variations, et b précède a d'où résulte encore une variation ; ainsi ce terme renferme six variations. Cela posé, formez toutes les permutations possibles entre toutes les lettres a, b, c, d, e, etc. et, dans chaque permutation, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, etc. ; ensuite faites précéder chaque permutation du signe +, si le nombre des variations y est nul ou pair, et du signe — si ce nombre est impair : égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez formé l'équation de condition demandée.

Cette règle est due à *Cramer* ; mais elle peut être simplifiée par le procédé suivant, donné par *Bezout*.

Écrivez la lettre a, et avec cette lettre et la lettre b formez toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord la lettre b la dernière, ensuite l'avant-dernière, puis changeant de signe lorsque b change de place, et vous aurez $+ab - ba$.

Avec ces deux permutations et la lettre c, formez toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord dans chaque terme la lettre c la dernière, puis l'avant dernière, et enfin la première, puis changeant de signe toutes les fois que c change de place, et vous aurez

$$+abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Combinez de la même manière toutes ces permutations avec la lettre d, et ainsi de suite, en employant autant de lettres qu'il y a d'inconnues μ, μ' etc.; cela posé, dans chaque terme, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, etc.; égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez les équations de condition pour que deux équations déterminées du premier degré à 2, à 3 etc. inconnues, soient possibles.

En effet, on a vu (1re sect. n° 226 et 227) que les conditions

$$ab'-ba'=0$$
$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0,$$

formées d'après cette règle, en changeant les indices en accents, résultaient comme conséquences des systèmes d'équations

$$1^{\circ}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}ax+by=0\\ a'x+b'y=0\end{array}\right.$$

$$2^{\circ}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}ax+by+cz=0\\ a'x+b'y+c'z=0\\ a''x+b''y+c''z=0.\end{array}\right.$$

La règle que nous venons de prescrire est, comme l'on voit, d'un usage fort commode, et il est facile de s'assurer qu'elle rentre dans celle de *Cramer*. Cela est d'abord évident pour les deux permutations $+ab-ba$: si on les combine avec la lettre c, il est aisé de voir qu'en écrivant dans ces deux termes la lettre c la dernière, le nombre des variations dans chacun d'eux ne changera pas : aussi conservent-ils le même signe

qu'ils avaient ; mais si, dans ces termes, on écrit la lettre c l'avant dernière, le nombre des variations est alors augmenté d'une unité ; et, suivant la règle, ils changent de signe : d'où il suit généralement que les termes dont le nombre des variations sera zéro ou pair, auront le signe + et les autres le signe —. D'ailleurs le nombre de termes dont est composée l'équation de condition, est, suivant les deux méthodes, égal à $1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n$, s'il y a n lettres, et tous ces termes sont différens les uns des autres ; donc l'équation de condition sera la même dans les deux cas. Nous allons maintenant démontrer la règle de *Bezout*, comme étant la plus simple.

132. Si au lieu de combiner la lettre a avec la lettre b, ensuite ces deux lettres avec c, et ainsi de suite, c'est-à-dire, si au lieu de combiner les lettres a, b, c, d, e, etc. dans l'ordre a, b, c, d, e, etc., on les eut combinées dans l'ordre a, c, b, d, e, etc, ou a, d, b, c, e, etc. ou a, e, b, c, d, etc., ou etc. je dis qu'on aurait toujours eu la même quantité à la différence des signes près.

Pour démontrer ce théorême, nommons, en général, *résultante*, la quantité donnée par l'une quelconque de ces combinaisons, ensorte que la première résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre a, b, c, d, e, etc. ; que la seconde résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre a, c, b, d, e, etc., que la troisième résultante soit due à la combinaison suivant l'ordre a, d, b, c, e, etc., et ainsi de suite : cela posé, il est clair que toutes ces résultantes renferment le même nombre de termes et précisément les mêmes, puisqu'elles sont composées de tous les termes qui peuvent résulter de la combinaison des n lettres a, b, c, d, e, etc., disposées entre elles de toutes les manières possibles ; il ne peut donc y avoir de différence entre deux résultantes que dans les signes de chacun de leurs termes : or, il est visible que la première résultante donne la seconde, si l'on change dans cette première b en c, et réciproquement ; mais ce changement ne peut qu'augmenter ou que diminuer d'une unité le nombre des variations de chaque

terme ; d'où il suit que, dans la seconde résultante, tous les termes dont le nombre des variations est impair, auront le signe +, et les autres le signe —; partant, cette seconde résultante n'est que la première prise négativement.

Il est visible pareillement que la seconde résultante donnera la troisième, en y changeant *c* en *d*, et réciproquement : or ce changement ne peut qu'augmenter ou diminuer d'une unité le nombre des variations de chaque terme; donc les termes dont le nombre des variations est zéro ou pair dans la troisième résultante, auront le signe +, et les autres le signe —. De là on conclura généralement que si l'on nomme R la première résultante, R' la seconde, R'' la troisième, etc., on aura

$$R' = -R; \quad R'' = R; \quad R''' = -R; \text{ etc.}$$

Il suit de là que si, dans la première résultante, on change *a* en *b*, et réciproquement, ou *a* en *c* et réciproquement, ou *a* en *d*; et réciproquement, etc., on aura toujours la même résultante à la différence des signes près. En effet, l'échange de *a* en *b* et de *b* en *a* ne signifie autre chose, sinon qu'au lieu de combiner $+ab-ba$ avec les lettres *c*, *d*, *e* etc., on combine $-ab+ba$ avec les mêmes lettres, ce qui donne la première résultante prise en — : pareillement l'échange de *a* en *c* et de *c* en *a*, indique qu'au lieu de combiner $+ac-ca$, avec les lettres *b*, *d*, *e* etc., on combine $-ac+ca$ avec les mêmes lettres, ce qui donne la seconde résultante prise en —, ou la première prise en +, et ainsi de suite.

Il suit encore du théorême précédent que si, dans la première résultante, on écrit *b*, ou *c*, ou *d* etc., partout où est *a*, cette résultante sera identiquement nulle; car je suppose que l'on écrive *c* au lieu de *a*, la première résultante est, d'après ce que nous venons de voir, égale à la troisième, c'est-à-dire, à celle qui résulte de la combinaison, suivant l'ordre *a*, *c*, *b*, *d*, *e*, etc., or en combinant d'abord les deux lettres *a* et *c*, on a $+ac-ca$: si l'on combine ces deux termes avec la lettre *b*, ensuite ceux-ci avec la lettre *d*, etc.,

est visible que la quantité qui en résultera, deviendra identiquement nulle en écrivant c pour a, puisqu'alors $ac - ca$ devient identiquement nul.

133. Je suppose maintenant que l'on ait les trois équations

$$0 = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu''$$
$$0 = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu''$$
$$0 = {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'' :$$

je forme d'abord la résultante des trois lettres a, b, c, suivant l'ordre a, b, c, ce qui donne

$${}^1a.{}^2b.{}^3c - {}^1a.{}^2c.{}^3b + {}^1c.{}^2a.{}^3b - {}^1b.{}^2a.{}^3c + {}^1b.{}^2c.{}^3a - {}^1c.{}^2b.{}^3a,$$

ou

$${}^1a[{}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b] + {}^2a[{}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c] + {}^3a[{}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b]:$$

je multiplie ensuite la première des équations ci-dessus par ${}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b$, la seconde par ${}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c$, la troisième par ${}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b$, et j'ajoute les produits, ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 = \mu\, & [{}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ + \mu'\, & [{}^1b({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2b({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3b({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ + \mu''\, & [{}^1c({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2c({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3c({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)]: \end{aligned}$$

or il suit, de ce que nous avons dit plus haut, que les coefficiens de μ' et de μ'' sont identiquement nuls, puisqu'ils ne sont que la résultante des trois lettres a, b et c, dans laquelle on écrit b ou c partout où est la lettre a : donc on aura pour l'équation de condition demandée

$$0 = {}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b),$$

c'est-à-dire, la résultante de la combinaison des trois lettres a, b, c, égalée à zéro. On démontrerait la même chose sur un nombre quelconque d'équations.

134. Pour démontrer l'analogie de ce qui vient d'être dit avec l'élimination des équations déterminées et complétes du premier degré, je suppose qu'on ait les trois équations

$$\begin{aligned} {}^1p &= {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'' \\ {}^2p &= {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'' \\ {}^3p &= {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu''. \end{aligned}$$

Je multiplie comme ci-dessus la première par $({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b)$, la seconde par $({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c)$, la troisième par $({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)$, je les ajoute ensemble, et j'observe que le coefficient de μ' et celui de μ'' sont identiquement nuls dans l'équation qui en résulte, d'où je conclus

$$\mu = \frac{{}^1p({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2p({}^1c.{}^3b - {}^1b{}^3c) + {}^3p({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)}{{}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)},$$

on voit donc que le numérateur de l'expression de μ se forme du dénominateur en y changeant a en p : on aura ensuite μ' où μ'' en changeant, dans l'expression de μ, a en b où c et réciproquement : mais en changeant dans le dénominateur de μ, a en b et réciproquement, on a toujours, par ce qui précède, la même quantité, au signe près : donc la valeur de μ' sera $\frac{K}{-R}$, R étant le dénominateur de μ, ou, ce qui revient au même, la première résultante des trois lettres a, b, c. K se formera de $-R$ en y changeant b en p : donc

$$\mu' = \frac{K}{-R} = \frac{-K}{R}.$$

Ainsi l'expression de μ' est réduite au même dénominateur que celle de μ, et les numérateurs de ces deux expressions se forment du dénominateur commun R en y changeant a en p pour μ et b en p pour μ'. C'est effectivement par ce procédé qu'on passera de la valeur de x à celle de y (1ère sect. n° 224). On démontrerait de la même manière que l'expression de μ''

à R pour dénominateur, et que son numérateur se forme de R en y changeant c en p. Cette règle a généralement lieu quelque soit le nombre des équations.

135. Voici maintenant un procédé fort simple qui peut considérablement abréger le calcul de l'équation de condition entre les lettres a, b, c, etc. Je suppose les deux équations

$$o = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' ; \quad o = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' ;$$

qu'on écrive $+ab$ et qu'on donne l'indice 1 à la première lettre et l'indice 2 à la seconde, et l'équation de condition demandée sera

$${}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a = o.$$

Je suppose trois équations : qu'on écrive $+ab$ et qu'on combine ce terme avec la lettre c de toutes les manières possibles, en changeant le signe de chaque terme, chaque fois que c change de place, on aura ainsi $abc - acb + cab$; qu'on donne dans chaque terme l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, et on aura $+{}^1a.{}^2b.{}^3c - {}^1a.{}^2c.{}^3b + {}^1c.{}^2a.{}^3b$: cela posé, au lieu de $+{}^1a.{}^2b.{}^3c$ qu'on écrive $+({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a){}^3c$; au lieu de $-{}^1a.{}^2c.{}^3b$ qu'on écrive $-({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a){}^2c$, et au lieu de $+{}^1c.{}^2a.{}^3b$ qu'on écrive $+({}^2a.{}^3b - {}^2b.{}^3a){}^1c$; l'équation de condition demandée sera

$$o = ({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a){}^3c - ({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a){}^2c + ({}^2a.{}^3b - {}^2b.{}^3a){}^1c.$$

Je suppose quatre équations : qu'on écrive $+abc - acb + cab$, et qu'on combine ces trois termes avec la lettre d, en observant 1° de n'admettre que les termes dans lesquels c précède d ; 2° de changer de signe dans chaque terme, toutes les fois que d change de place, et on aura

$$+abcd - acbd + acdb + cabd - cadb + cdab :$$

qu'on donne ensuite l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, etc., et on aura

$$+ {}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d - {}^1a.{}^2c.{}^3b.{}^4d + {}^1a.{}^2c.{}^3d.{}^4b + {}^1c.{}^2a.{}^3b.{}^4d - {}^1c.{}^2a.{}^3d.{}^4b + {}^1c.{}^2d.{}^3a.{}^4b :$$

cela posé, au lieu de $+ {}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d$, qu'on écrive

$$({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a)({}^3c.{}^4d - {}^3d.{}^4c),$$

et ainsi des autres termes, et l'équation de condition sera

$$\begin{aligned} o = & ({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a)({}^3c.{}^4d - {}^3d.{}^4c) - ({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a)({}^2c.{}^4d - {}^2d.{}^4c) \\ & + ({}^1a.{}^4b - {}^1b.{}^4a)({}^2c.{}^3d - {}^2d.{}^3c) + ({}^2a.{}^3b - {}^2b.{}^3a)({}^1c.{}^4d - {}^1d.{}^4c) \\ & - ({}^2a.{}^4b - {}^2b.{}^4a)({}^1c.{}^3d - {}^1d.{}^3c) + ({}^3a.{}^4b - {}^3b.{}^4c)({}^1c.{}^2d - {}^1d,{}^2c). \end{aligned}$$

Je suppose cinq équations : qu'on écrive les six termes

$$+ abcd - acbd + \text{etc.}$$

relatifs à quatre équations, et qu'on les combine avec la lettre e de toutes les manières possibles, en observant de changer de signe chaque fois que e change de place ; qu'on donne l'indice 1 à la première lettre de chaque terme, l'indice 2 à la seconde etc., qu'on transforme ensuite chacun de ces termes dans un autre, suivant la méthode que nous venons de prescrire à l'égard des équations à trois et à quatre inconnues; ainsi au lieu du terme $+ {}^1a.{}^2c.{}^3b.{}^4e.{}^5d$, qu'on écrive $+ ({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a)({}^2c.{}^5d - {}^2d.{}^5c).{}^4e$; qu'on égale à zéro la somme de tous ces termes, et on aura l'équation de condition demandée.

Pour six équations, on combinera les termes $+ abcde - abced +$ etc. relatifs à cinq équations avec la lettre f, en observant 1° de n'admettre que les termes dans lesquels e précède f; 2° de changer de signe lorsque f change de place : on transformera ensuite, par la règle précédente, chaque terme dans un autre composé du produit de trois facteurs, chacun de deux dimensions et de deux termes, et l'on aura l'équation de condition demandée. Il en sera de même pour un nombre quelconque d'équations.

Le citoyen *Laplace* démontre le procédé ci-dessus, c'est-à-dire, qu'il fait voir que l'équation de condition qu'il donne est identiquement la même que celle qui résulte des méthodes de *Cramer* et de *Bezout*. Comme il ne s'agit ici que d'une abréviation de calcul, nous nous bornerons aux énoncés qui précèdent, en renvoyant pour la démonstration au mémoire cité.

CHAPITRE XXVII.

Sur les différens systèmes de numération et sur quelques propriétés des nombres considérés comme diviseurs.

136. DANS le système de notre Arithmétique, tout nombre est égal au chiffre des unités multiplié par $\overline{10}^0$, plus au chiffre des dixaines multiplié par $\overline{10}^1$, et ainsi de suite, ensorte que

$$3456 = 3 \times \overline{10}^3 + 4 \times \overline{10}^2 + 5 \times \overline{10}^1 + 6 \times \overline{10}^0.$$

Les termes de la progression géométrique

$$10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : 10^{n-1}$$

sont donc les facteurs par lesquels se trouvent multipliés tous les chiffres d'un nombre, en allant de gauche à droite, dans l'Arithmétique décuple. Cette progression est l'*échelle* de l'Arithmétique ordinaire, et 10 en est la *racine*.

Si au lieu de prendre pour échelle les puissances successives de 10, on adoptait les puissances successives de 7, par exemple, on aurait un nouveau système de numération, fondé sur 7 caractères ou signes. (Arith. leçon 31ème).

Soit donc a la racine d'une échelle quelconque, tout nombre N sera, dans le système de numération correspondant, représenté par

$$N = Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + Da^{n-3} + \ldots\ldots + Pa^1 + Qa^0,$$

les coefficiens A, B, C.........P et Q désignant tous les chiffres du nombre, et n le nombre de ces chiffres diminué d'une unité.

Les questions principales que nous nous proposons de résoudre ont pour énoncés : 1° *L'expression d'un nombre dans une échelle, étant donné, trouver l'expression du même nombre rapporté à une autre échelle dont la racine est donnée.*

Supposons que la racine connue soit a, la question est réduite à évaluer les coefficiens A, B, C...........P et Q : or il est visible que tous les termes de la formule générale donnée ci-dessus sont, à l'exception du dernier, divisibles par a; donc la valeur de Q sera le reste de la division du nombre proposé par a. Le quotient de cette division sera

$$Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + P,$$

dont tous les termes, à l'exception de P, sont divisibles par a, ensorte que la valeur de P sera donnée par le reste provenant de cette seconde division. Mais le quotient correspondant est

$$Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + Ca^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + R,$$

dont tous les termes, excepté le dernier, sont pareillement divisibles par a, d'où résulte que la valeur de R est le reste de cette division et ainsi de suite : en continuant à diviser les restes successifs par la racine de l'échelle, on aura les valeurs des autres coefficiens, et de là on déduit cette règle :

Divisez le nombre proposé par l'échelle du nouveau système, écrivez le reste ou zéro s'il ne reste rien ; divisez le premier quotient par le même nombre, écrivez ce second

reste à la gauche du premier; divisez le second quotient par le même nombre, écrivez ce troisième reste à gauche du second, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division cesse d'être possible, et donne o pour quotient. La série des restes ainsi disposés les uns à la gauche des autres, sera le nombre traduit dans le nouveau système de numération.

Soit le nombre 4497 qu'on propose de traduire du système décuple dans celui dont l'échelle est 7 : on fera, conformément à la règle, l'opération suivante :

$$4497 \left\{ \frac{7}{642} \left\{ \frac{7}{91} \left\{ \frac{7}{13} \left\{ \frac{7}{1} \left\{ \frac{7}{0} \right. \right. \right. \right. \right.$$

1 6 0 5 3

5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ, 2ᵉ, 1ᵉʳ reste;

il faut donc cinq chiffres pour écrire 4497 dans le système septenaire, et

$$4497 = 1.7^4 + 6.7^3 + 5.7^1 + 3.7^0 :$$

en supprimant les puissances de 7, il ne reste que les coefficiens et, en passant d'un chiffre à celui qui est immédiatement à gauche, les unités deviennent de sept en sept fois plus grandes : on observera que, dans ce système de numération, le nombre 7 est représenté par 10.

Cette manière de résoudre le problème proposé est plus simple et conséquemment préférable à celle qu'on trouve dans *les Mémoires de l'Académie, dans Buffon et l'Encyclopédie méthodique.*

Réciproquement un nombre étant écrit dans un système donné, on le traduira dans le système décuple, en multipliant chaque chiffre de ce nombre par les puissances successives de

l'échelle et faisant l'addition de ces produits. Ainsi, pour traduire le nombre 16053 du système septenaire dans le système décuple, on ajoutera les seconds membres des égalités $1.7^4=2401$; $6.7^3=2058$; $0.7^2=0$; $5.7^1=35$; $3.7^0=3$, et on trouvera pour leur somme 4497.

On pourrait aussi résoudre ce problême en divisant 16053 par 10; mais on observera que le nombre proposé étant écrit dans le système septenaire, il faut traduire 10 dans le même système, c'est-à-dire, écrire 13 pour diviseur. Ensorte qu'on a l'opération

$$16053\left\{\frac{13}{1211}\left\{\frac{13}{62}\left\{\frac{13}{4}\left\{\frac{13}{0}\right.\right.\right.\right.$$

On observera de lire dans cette suite de divisions le dividende et le diviseur dans le système septenaire : ainsi, pour la première, on dira : en 16 qu'on énoncera treize, le diviseur 13 qu'on énoncera dix, est 1 fois avec un reste 3 à la gauche duquel il faut descendre 0, ce qui donnera 30 ou vingt-un qui contient 2 fois dix, plus un reste 1 qui avec 5 écrit à sa gauche donne 15, ou douze qui contient 1 fois 10 avec un excédant 2 à la droite duquel on doit descendre 3, ensorte qu'on a 23, ou dix-sept à diviser par dix, ce qui donne 1 pour quotient et 7 pour reste. Cette explication est plus que suffisante. Les restes de ces divisions sont

4 4 9 7
4e, 3e, 2e, 1er reste.

ensorte que la traduction du nombre proposé dans le système décuple est 4497, résultat trouvé par le premier procédé.

2° Reprenons la formule

$$N=Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+Pa^1+Qa^0$$

qu'on peut écrire sous cette forme

$$N=A(a^n-1)+B(a^{n-1}-1)+C(a^{n-2}-1)+D(a^{n-3}-1)\ldots\ldots$$
$$+A+B+C+D+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si N est divisible par $a-1$, nécessairement comme les facteurs a^n-1, $a^{n-1}-1$, $a^{n-2}-1$, $a^{n-3}-1$, etc. sont divisibles par $a-1$, la somme $A+B+C+D+\ldots\ldots\ldots$ doit être divisible par $a-1$. Ainsi le nombre 1656 est divisible par 9, parceque la somme $1+6+5+6$ est un multiple de 9 (arith. leç. 25ème. Algèbre 1ère sect. n° 46).

De plus, si le nombre proposé n'est pas divisible par 9, le reste de la division sera le même que celui qu'on obtiendra en divisant par 9 la somme de ses chiffres considérés comme des collections d'unités simples. Par exemple, 256 divisé par 9, donne 4 pour reste, mais

$$2+5+6=13$$

divisé par 9, donne aussi le reste 4.

Ces considérations sur le nombre 9, et sur la manière d'obtenir les restes des divisions par 9, sans les effectuer, peuvent s'étendre à tout autre nombre. Soit donc un nombre à diviser par 8, on peut le représenter généralement par

$$A.10^n+B.10^{n-1}+C.10^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+P.10+Q.10^0$$
$$=A(10^n-2^n)+B(10^{n-1}-2^{n-1})+C(10^{n-2}-2^{n-2})+\ldots\ldots$$
$$+M(10^2-2^2)+P(10-2)+Q(10^0-2^0)$$
$$+A.2^n+B.2^{n-1}+C.2^{n-2}+\ldots\ldots M.2^2+P.2^1+Q:$$

or tous les termes de ce développement, à l'exception de $M.2^2+P.2^1+Q$, sont divisibles par 8; donc, s'il y a un reste, il ne peut être que dans

$$4M+2P+Q,$$

car les autres puissances de 2 sont des multiples de 8.

On demande le reste de 4135 divisé par 8 : on a, dans ce cas,

$$Q=5,\ P=3,\ M=1\ ;$$

donc

$$4M+2P+Q=4+6+5=15,$$

qui divisé par 8 donne 7 pour reste.

On aura donc toujours les restes de la division d'un nombre par 8, en prenant la somme du premier chiffre à droite multiplié par 1, plus du second multiplié par 2, plus du troisième par 4, et la divisant par 8. On aura le reste final ou plus petit que 8, en appliquant ce procédé à cette somme de restes et ainsi de suite.

Tout nombre à diviser par 7 peut être mis sous la forme

$$A(10^n-3^n)+B(10^{n-1}-3^{n-1})+C(10^{n-3}-3^{n-3})\ldots\ldots\ldots$$
$$+M(10^2-3^2)+P(10-3)+Q(10^0-3^0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+A.3^n+B.3^{n-1}+C.3^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots M.9+P.3+Q.$$

Les premiers termes étant divisibles par $10-3=7$, s'il y a un reste, il doit être dans la somme des coefficiens multipliés par les restes des puissances successives de 3, divisées par 7. Or le reste de 3^0 est 1, celui de 3 est 3, celui de 3^2 est 2, celui 3^3 est de 6, de 3^4 est 4, de 3^5 est 5, de 3^6 est 1, de 3^7 est 3.... où l'on voit que les mêmes restes reviennent dans le même ordre et forment des périodes à l'infini, commençant toutes par l'unité.

Il suit de là que si on a le nombre 13527541 à diviser par 7, on pourra l'écrire comme il suit en mettant chacun des restes sous le chiffre correspondant qui doit le multiplier :

```
          13527541
          31546231
          --------
                 1
                12
                10
                42
                 8
                25
                 3
                 3
               ---
Somme  =       104
               231
               ---
                 4
                 0
                 2
               ---
Reste  =         6.
```

Après avoir trouvé 104 pour somme des restes de la division des unités successives du nombre proposé par 7, on répète l'opération sur cette somme et on obtient le reste final de la division.

Prenons pour dernier exemple le diviseur 11. La formule générale peut se mettre sous la forme

$$N=(11-1)^n+B(11-1)^{n-1}+C(11-1)^{n-2}..+P(11-1)+Q\,;$$

or dans le développement de ces binomes, tous les termes, excepté le dernier, en supposant le développement ordonné suivant les puissances descendantes de n, seront divisibles par 11 ; de plus, le dernier terme des puissances impaires sera négatif, et celui des puissances paires sera positif : donc si la division par 11 donne un reste, il sera le même que celui qui résultera de la somme $Q-P+M-N+$etc. .. c'est-à-dire,

de la somme des coefficiens, ou des chiffres successifs du nombre, multipliés alternativement par $+1$ et -1. Pour avoir, par exemple, le reste de la division de 64573 par 11, on fera les deux sommes

$$\begin{array}{rr} 3+5+6= & 14 \\ -7-4= & -11 \\ \hline \text{Reste} \ldots\ldots\ldots\ldots = & 3 \end{array}$$

donc la division du nombre proposé par 11, donne 3 pour reste.

FIN.

NOTE
SUR LE CHAPITRE XV,

Nous ferons connaître quelques développemens qui ne sont que des transformations ou des conséquences immédiates de ceux auxquels nous sommes parvenus dans le chapitre cité.

Nous avons trouvé le développement de l'exponentielle

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Le module que nous avons désigné par M, n'est autre chose que $\frac{1}{A}$, en sorte que

$$A = \frac{1}{M} = l.a$$

substitution qui donne

$$a^x = 1 + \frac{x}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{M}\right)^3 + \text{etc.} \ldots (1)$$

$$= 1 + x\,l.a + \frac{1}{1.2}(x\,l.a)^2 + \frac{1}{1.2.3}(x\,l.a)^3 + \text{etc.} \ldots (2)$$

$l.a$ désignant, ainsi que nous l'avons dit, le *logarithme hyperbolique* de la base a.

On a d'ailleurs

$$l.a^x = x\,l.a$$

d'où résulte encore, après la substitution dans le second développement de a^x,

$$a^x = 1 + l.a^x + \frac{1}{1.2}(l.a^x)^2 + \frac{1}{1.2.3}(l.a^x)^3 + \text{etc.};$$

et faisant $a^x = n$, on obtient

$$n = 1 + l.n + \frac{1}{1.2}(l.n)^2 + \frac{1}{1.2.3}(l.n)^3 + \text{etc.}$$

Si l'on suppose $l.n = 1$, auquel cas, n devient la base que nous avons désignée par e, on retombe sur

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La formule précédente fait trouver le nombre dont on a le logarithme hyperbolique. Le développement de a^x, donnerait en faisant $a^x = n$,

$$n = 1 + \frac{\log n}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\log n}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\log n}{M}\right)^3 + \text{etc.};$$

cette formule servirait à calculer le nombre, lorsqu'on connaît son logarithme tabulaire.

Si, dans le développement de a^x, on change d'abord x en nx, puis a en x, il viendra

$$x^{nx} = 1 + Anx + \frac{A^2}{1.2}n^2x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}n^3x^3 + \text{etc.}$$

dans lequel

$$A = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \text{etc.},$$

or, ce développement de A n'est autre chose que le logarithme hyperbolique de x, comme on peut s'en assurer en faisant

$$1 + b = x$$

dans $l(1+b)$; donc enfin,

$$x^{nx} = 1 + nx(l.x) + \frac{n^2x^2}{1.2}(l.x)^2 + \frac{n^3x^3}{1.2.3}(l.x)^3 + \text{etc.}$$

Cette formule trouve son emploi dans le calcul intégral, ainsi qu'on peut le voir dans le Recueil de mes Leçons à l'Ecole Polytechnique.

Il est facile, d'après ce qui précède, de démontrer un théorême curieux donné par le *citoyen Bossut*, pour exprimer le nombre $x^m - r^m$ par une suite non terminée. En voici l'énoncé

$$x^m - r^m = \frac{m(l.x - l.r)}{1} + \frac{m^2(l^2.x - l^2.r)}{1.2} + \frac{m^3(l^3.x - l^3.r)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En effet, qu'on substitue successivement x^m, puis r^m pour a^x dans le développement (2) de l'exponentielle a^x, on aura

$$x^m = 1 + ml.x + \frac{1}{1.2} m^2 l^2.x + \frac{1}{1.2.3} m^3 l^3.x + \text{etc.}$$

$$r^m = 1 + ml.r + \frac{1}{1.2} m^2 l^2.r + \frac{1}{1.2.3} m^3 l^3.r + \text{etc.}$$

et retranchant la seconde formule de la première, on a pour résultat le théorème en question. L'auteur s'en est servi pour dénoner une espèce de paradoxe de calcul intégral qu'on démontre dès l'exposition des premiers principes.

Dubourguet, dans son Algèbre, donne pour calculer les logarithmes des nombres premiers 2, 3 et 5 des formules plus convergentes que celles de *Borda*, relatées (chap. XV, n° 75). Nous ferons connaître ici l'analyse et les observations de ce géomètre.

Si dans la formule

$$\log(n+1) = \log n + \frac{2}{l.a}\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \text{etc.}\right\}$$

trouvée (page 207) on change $n+1$ en n et conséquemment n en $n-1$, on trouvera la suivante

$$\log n = \log(n-1) + \frac{2}{l.a}\left\{\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \text{etc.}\right\}:$$

que dans celle-ci, on fasse $n = z^2$, et qu'on représente par S la série qui multiplie $\frac{2}{l.a}$, et on aura

$$2\log z = \log(z+1) + \log(z-1) + \frac{2}{l.a}S,$$

d'où résulte

$$\log(z+1) = 2\log z - \log(z-1) - \frac{2}{l.a}S \ldots\ldots (1).$$

Faisant successivement $z=4$, $=5$, $=9$, et représentant par S', S'', S''', ce que devient S pour ces trois valeurs de z, nous aurons les trois équations

$$\log 5 = 2\log 4 - \log 3 - \frac{2S'}{l.a}$$

$$\log 6 = 2\log 5 - \log 4 - \frac{2S''}{l.a}$$

$$\log 10 = 2\log 9 - \log 8 - \frac{2S'''}{l.a},$$

desquelles on déduit les trois suivantes

$$\log 5 - 4\log 2 + \log 3 = -\frac{2S'}{l.a}$$

$$\log 3 + 3\log 2 - 2\log 5 = -\frac{2S''}{l.a}$$

$$\log 5 + 4\log 2 - 4\log 3 = -\frac{2S'''}{l.a}.$$

Si l'on regarde $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$ comme trois inconnues qu'il s'agit d'évaluer, on trouvera

$$\log 2 = \frac{2}{l.a}\left\{\ 7S' + 5S'' + 3S'''\ \right\}$$

$$\log 3 = \frac{2}{l.a}\left\{\ 11S' + 8S'' + 5S'''\ \right\}$$

$$\log 5 = \frac{2}{l.a}\left\{\ 16S' + 12S'' + 7S'''\ \right\}.$$

Substituant dans ces trois équations les valeurs en séries de S', S'' et S''' pour $z = 4, = 5, = 9$, on aura

$$\log 2 = \frac{2}{l.a}\left\{ 7\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \text{etc.}\right] + 5\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$\left. + 3\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \text{etc.}\right]\right\}$$

$$\log 3 = \frac{1}{l.a}\left\{ 11\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{3.31^5} + \text{etc.}\right] + 8\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$\left. + 5\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \text{etc.}\right]\right\}$$

$$\log 5 = \frac{1}{l.a}\left\{ 16\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{3.31^5} + \text{etc.}\right] + 12\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$\left. + 7\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \text{etc.}\right]\right\}.$$

Ces séries sont plus convergentes que celles du texte ; de plus, comme les séries facteurs sont les mêmes dans ces trois logarithmes, une fois qu'elles sont évaluées, on forme très-facilement log 2, log 3 et log 5. L'auteur ajoute : la formule (t) sera encore la plus convergente de toutes celles dont on puisse se servir pour calculer le logarithme de 7. Mais pour les nombres premiers 11, 13, 17........43 et 47, la formule de *Borda* (n° 75) est plus convergente que (1). Mais à commencer du nombre premier 53, la formule de *Borda* cède l'avantage à celle de *Haros* (n° 76) qui la conserve toujours : celle-ci, observe le *citoyen Dubourguet*, est tellement convergente, que, pour le premier nombre 53 auquel elle doit être appliquée, le troisième terme donne

$$0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 96945 \text{ etc.}$$

Fin de la Note.

TABLE DES MATIÈRES
TRAITÉES DANS LA SECONDE SECTION.

CHAPITRE PREMIER.

Une équation algébrique de degré quelconque, ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$, *a et* b *étant des quantités réelles.* De la page première à la page huitième.

Théorêmes préliminaires : 1°. Si une équation algébrique a pour racine une quantité de la forme $a+b\sqrt{-1}$, elle en aura nécessairement une autre de la forme $a-b\sqrt{-1}$. 2°. Toute fonction algébrique de $a\pm b\sqrt{-1}$ peut-être ramenée à la forme $P\pm Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles. Démonstration de l'énoncé. On en conclut, 1°. qu'une équation d'un degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré ; 2°. qu'une équation ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de même forme que celles du second degré.

CHAPITRE II.

Des racines imaginaires. 8 à 19.

A l'inspection des signes de l'équation aux quarrés des différences, on peut toujours reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles, et le plus grand nombre de racines imaginaires qu'elle peut admettre. Application de ces théorêmes aux équations des second et troisième degrés. On peut déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires de celles des équations qu'on sait d'avance ne pas admettre plus de quatre racines imaginaires. Exposition de la méthode pour trouver les racines imaginaires des équations. Deux cas à distinguer : 1°. toutes les racines réelles négatives de l'équation aux quarrés des différences sont inégales entre elles. 2°. Parmi ces racines réelles négatives, il s'en trouve d'égales entre elles. La racine imaginaire étant représentée par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on aura, dans le premier cas, une unique valeur de α pour chaque valeur de β, et dans le second, à une valeur de β correspondront des valeurs multiples de α. On doit rejeter toutes les valeurs imaginaires de α.

CHAPITRE III.

Génération des fractions continues, leur réduction en fractions ordinaires; et quelques propriétés de ces fractions. 19 à 45.

fraction dont le dénominateur N soit moindre que le dénominateur Q d'une des fractions convergentes $\frac{P}{Q}$, la fraction $\frac{P}{Q}$ exprimera plus exactement la valeur de x que la fraction $\frac{M}{N}$. Les fractions convergentes peuvent se séparer en deux classes, composées, la première, des fractions plus petites, et la seconde des fractions plus grandes que la fraction continue totale. On distingue deux cas : 1°. celui dans lequel, entre deux fractions de chaque classe, on ne peut intercaler aucune autre fraction dont le dénominateur soit moindre que le plus grand des deux dénominateurs; 2°. celui dans lequel on peut intercaler entre deux une suite d'autres fractions dont les deux termes croissent par différences égales; et alors on ne peut, entre deux de celles-ci, intercaler une fraction dont le dénominateur tombe entre ceux de ces fractions. Il y a lieu alors à deux suites de ces fractions composées de fractions principales et intermédiaires ou secondaires, les unes croissantes et plus petites que x, les autres décroissantes et plus grandes que x. Ces deux suites vont à l'infini, lorsque le nombre est irrationnel : lorsqu'il est commensurable, l'une des séries s'arrête, et l'autre procède à l'infini. Une fraction exprimée par de grands nombres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples. Une fraction continue périodique représentée par x conduit toujours, pour la détermination de x, à une équation du second degré. Application de cette propriété à l'extraction de la racine quarrée par approximation.

CHAPITRE IV.

Méthode d'approximation des racines incommensurables des équations numériques. 45 à 61.

Chaque racine incommensurable d'une équation peut être réduite en une fraction continue. On peut donc assigner une suite de fractions alternativement plus grandes et plus petites que chacune de ces racines, et qui en approchent de plus en plus. Application de cette méthode à quelques exemples. Elle donne avec toute l'approximation désirable les racines négatives incommensurables de l'équation aux quarrés des différences, prises positivement, lesquelles servent à trouver les couples correspondans de racines imaginaires. Examen du cas dans lequel l'une des racines réelles incommensurables d'une équation est donnée par une fraction continue périodique. Exposition d'une méthode très-simple pour réduire en fractions continues les racines d'une équation du second degré. Ces fractions continues sont toujours périodiques. Usage de cette méthode pour développer la racine quarrée d'un nombre en fraction continue.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

Digitized by Google

celles de la proposée. Examen des racines des équations des troisième et quatrième degrés. Méthode qui paraît avoir servi à la première résolution des équations du troisième degré, généralement attribuée à *Cardan*, quoiqu'il semble, dit *Lagrange*, que c'est de *Hudde* que nous la tenons. Méthode analogue à la précédente pour le quatrième degré. Conjectures d'*Euler* sur la forme des racines d'une équation d'un degré quelconque n : il suppose pour forme générale des racines

$$x = a\sqrt[n]{u} + b\sqrt[n]{u^2} + c\sqrt[n]{u^3} + \ldots\ldots + m\sqrt[n]{u^{n-1}},$$

$a, b, \ldots m$ étant des indéterminées; l'hypothèse de $\sqrt[n]{u} = y$, donne lieu aux deux équations $y^n - u = 0$, $x = ay + by^2 + cy^3 + \ldots\ldots + my^{n-1}$. Le résultat de l'élimination de y entre les deux précédentes est une équation du degré n, sans second terme. *Theveneau*, après avoir calculé cette équation finale pour le cinquième degré, a été arrêté par la longueur des calculs qui restaient à faire pour obtenir la réduite.

CHAPITRE VIII.

De la décomposition des équations en facteurs d'un degré supérieur au premier. 115 à 126.

On a prouvé, chapitre premier, la possibilité de cette décomposition en facteurs réels du second degré : on se propose dans celui-ci de faire connaître sur quelques exemples, la méthode que l'on peut employer à cet effet. Extension de cette méthode à la décomposition de l'équation la plus générale du sixième degré sans second terme, en facteurs réels du troisième degré. Autre manière d'envisager la question, en la restreignant cependant à la décomposition d'une équation du quatrième degré en ses diviseurs du second degré. Cette question se réduit à celle de former une équation qui ait pour racines toutes les sommes des racines de la proposée, prises deux à deux. Examen du cas où la proposée, toujours du quatrième degré, ne renferme que les puissances paires de l'inconnue. La décomposition d'une équation du troisième degré en deux facteurs, l'un du second degré et l'autre du premier, conduirait à la résolution d'une équation de même degré que la proposée.

CHAPITRE IX.

De l'extraction des racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables. 127 à 136.

Assigner la relation qui doit exister entre les nombres a et b pour que $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ soit réductible à la forme $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. Applications. Extraction de la racine n^{me} de $a+\sqrt{b}$. Applications.

CHAPITRE X.

De l'évanouissement des radicaux dans les équations. 137 à 142.

Règle générale à suivre pour faire disparaître les radicaux qui affectent l'inconnne dans une équation. Applications de cette règle. Une fonction de radicaux étant donnée, remonter à l'équation qui aurait cette fonction pour l'une de ses racines.

CHAPITRE XI.

De l'abaissement des équations. 142 à 149.

L'abaissement d'une équation, c'est-à-dire, la réduction de son degré, a lieu lorsqu'il existe une relation particulière entre ses racines. Ces relations sont de la forme $ia+kb=b$, $ha+ib+kc=l$, h, i, k, l, etc., étant des nombres donnés, a, b, c, etc., les racines de la proposée. Il peut encore arriver 1°. que plusieurs racines soient égales; ce cas a été traité dans la première section; 2°. que des racines soient réciproques, c'est-à-dire, qu'il y en ait une $=a$ et une autre $=\frac{1}{a}$. Cette circonstance sera examinée dans le chapitre suivant. Exemples qui se rapporteut au cas où parmi les racines, il s'en trouve d'égales avec des signes contraires.

CHAPITRE XII.

Résolution des équations réciproques; résolution des équations de la forme $x^m \pm a^m = 0$, $x^{2m} - 2px^m + q = 0$. 149 à 178.

L'équation $x^m \pm a^m = 0$ est réductible à $y^m \pm 1 = 0$. La résolution de l'équation $y^m - 1 = 0$, lorsque m n'est pas un nombre premier, dépend de celle d'autant d'équations semblables que m admet de facteurs nombres premiers. L'équation $x^{2p+1} - 1 = 0$ peut toujours être rabaissée au degré p. Définition des équations réciproques. Toute équation réciproque du degré $2m$ est toujours réductible au degré m, et celle du degré $2m+1$ peut être abaissée au degré $\frac{2m-1}{2}$. Lorsqu'on ne peut trouver algébriquement les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, il est possible de les exprimer en lignes trigonométriques. Deux démonstrations du Théorème préliminaire

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1},$$

l'formule générale et construction géométrique des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$. Formule générale et construction géométrique des racines de l'équation $x^m + 1 = 0$. Toute racine paire, ainsi que toute puissance irrationnelle d'une quantité négative, est imaginaire. Toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ seront représentées par les puissances successives $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^m$, α étant la première racine. Toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ peuvent encore être représentées par les puissances 1ere, 2e, 3e, etc. de l'une quelconque α^p des racines, pourvu que m soit un nombre premier, ou que p et m soient des nombres premiers entr'eux. Pour l'équation $x^m - 1 = 0$, les sommes des puissances $1^{ere}, 2^e \ldots (m-1)^{eme}$ des racines, seront nulles. Les sommes des puissances des racines dont les exposans ne seront pas des multiples de m seront nulles, et celles des puissances des racines dont les exposans seront divisibles par m, deviendront égales à m. Les sommes des puissances négatives des racines se comportent de la même manière que celles des puissances des racines positives. Pour l'équation $x^m + 1 = 0$, on aura

$$S_{mk} = -m \text{ et } S_{km+r} = 0,$$

S_{mk} et S_{km+r} désignant les sommes des puissances des racines divisibles et non divisibles par le degré de l'équation. Si dans un cercle décrit d'un rayon $= a$, on mène un diamètre quelconque, qu'à partir d'une des extrémités de ce diamètre, on divise la circonférence en $2m$ parties égales, et que l'on désigne par $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ etc. ces divisions, en faisant répondre 0 à l'origine, si d'un point quelconque pris sur le diamètre ou sur son prolongement et du même côté du centre que l'origine des arcs, on mène des droites à tous les points de division, le produit de toutes celles menées aux numéros impairs, est égal à la somme des puissances m du rayon et de la distance au centre du point pris arbitrairement. Celui de toutes les droites menées aux numéros pairs est égal à la différence des mêmes puissances. Le produit de toutes les lignes menées du point pris arbitrairement à toutes les divisions paires et impaires, en y comprenant celles qui aboutissent aux deux extrémités du diamètre, est égal à $x^{2m} - 1$. Résolution de l'équation $x^{2m} - 2px^m + q = 0$: on peut, lorsque $p^2 > q$, la faire dépendre de celle des deux équations $x^m - \alpha = 0$, $x^m - \beta = 0$. Du cas où $p^2 < q$. Du théorème de *Moivre*: il contient celui de *Cotes*. Démonstration du théorème de *Cotes*, d'après des principes connus à l'époque où ce géomètre écrivait.

CHAPITRE XIII.

Du problême de la trisection de l'angle. Résolution trigonométrique des équations des second et troisième dégrés. 178 à 190.

Etant donné le cosinus d'un angle, trouver le sinus de son tiers. Toute équation du troisième degré qui tombe dans le cas irréductible, est compa-

CHAPITRE XIV.

CHAPITRE XV.

coefficient quelconque de l'équation en sommes de ces puissances : 4°. développement d'une puissance quelconque d'une quantité composée d'autant de termes que l'on voudra.

(*Note sur ce chapitre*). Deux transformations du développement des exponentielles a^x. On en déduit deux formules qui servent à calculer le nombre dont on a le logarithme hyperbolique ou tabulaire. Développement de l'exponentielle x^{nx}. Expression de la différence $x^m - r^m$ par une suite non terminée. $\log 2$, $\log 3$, et $\log 5$ donnés par des formules plus convergentes que celles du texte. Observations du citoyen *Dubourguet* sur les formules de *Borda* et de *Haros*.

CHAPITRE XVI

Développement des quantités trigonométriques. 233 à 251.

Développemens par la méthode des coefficiens indéterminés des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes, entières et positives l'arc x. Développemens des mêmes fonctions déduites de la propriété

$$(\cos A + \sin A\sqrt{-1})^m = (\cos mA + \sin mA\sqrt{-1}).$$

Enonciation succincte de $\sin x$ et $\cos x$ au moyen de l'exponentielle e^x. Développement de l'arc suivant la puissance de sa tangente. Série très-convergente, due à *Bertrand de Genève*, pour évaluer les arcs en parties du rayon. Développement de $\tang x$ en fraction continue. Extension du théorême $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ à des arcs imaginaires. Autre manière d'établir le théorême

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1}.$$

Ouvrages à consulter sur l'emploi numérique des développemens de $\sin x$ et de $\cos x$. Enonciation singulière de la demi-circonférence. Un nombre quelconque positif comporte une infinité de logarithmes dont un seul est reel et tous les autres imaginaires. Les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires.

CHAPITRE XVII.

Extension du théorême démontré (n° 2) *aux fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires.* 251 à 253.

Les fonctions transcendantes

$l(a \pm b\sqrt{-1})$, $e^{a \pm b\sqrt{-1}}$; $(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}}$; $\sin(a \pm b\sqrt{-1})$; $\cos(a \pm b\sqrt{-1})$ sont réductibles à la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des sommes de termes réels.

CHAPITRE XVIII.

Analyse des sections angulaires. 254 à 260.

CHAPITRE XIX.

Sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique, des nombres figurés, et des produits différens qu'on peut faire avec tous les termes d'une progression arithmétique, pris 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc. Résolution des équations dont les racines forment une progression par équidifférences. 261 à 274.

CHAPITRE XX.

Des suites récurrentes. 275 à 293.

rationnelle génératrice, et la somme d'un nombre quelconque de termes d'une telle suite. Déterminer l'expression d'un terme quelconque, indépendamment de ceux qui le précèdent, ou le terme général. Etant donné le terme général $(K+K'm+K''m^2+\ldots+K^{(\mu-1)}m^{(\mu-1)})r^m x^m$, remonter à la fraction génératrice. Etant donnée une suite de termes dont les valeurs sont connues, trouver si cette suite est récurrente, et déterminer, dans ce cas, la formule générale de ses termes. Applications. Développement en fraction continue d'une suite récurrente.

CHAPITRE XXI.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. 293 à 303.

Cette décomposition suppose, 1°. que le polynome numérateur soit d'un degré moindre, au moins, d'une unité que le polynome dénominateur; 2°. que le dénominateur soit décomposé en ses facteurs simples. On peut toujours supposer la fraction

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{A'}{x-\alpha'}+\frac{A''}{x-\alpha''}+\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{x-\alpha^{(n-1)}};$$

les racines α, α', ... $\alpha^{(n-1)}$ du dénominateur étant réelles ou imaginaires, et A, A'..... $A^{(n-1)}$ étant des coefficiens constans et indéterminés. Deux méthodes pour évaluer ces coefficiens. Formules générales de ces coefficiens. Ces formules sont en défaut lorsque, parmi les facteurs simples du dénominateur, plusieurs sont égaux entr'eux. Mode de décomposition à adopter à l'égard des facteurs égaux. Applications.

CHAPITRE XXII.

Transformation des fractions. 304 à 314.

Transformation d'une fraction irréductible en une autre dont le numérateur ou le dénominateur soit donné. En généralisant, on parvient à cette décomposition $\frac{B}{A}=\frac{m}{a}\pm\frac{n}{ab}\pm\frac{p}{abc}\pm\frac{q}{abcd}\pm$ etc., les signes + et − ayant lieu suivant qu'on fait la division en dedans ou en dehors, et les dénominateurs a, b, c, d, etc. étant donnés. On a toujours $m<a+1$, $n<b+1$, $p<c+1$ etc. Application à la transformation de la fraction irréductible $\frac{887}{1103}$. Ce que de-

vient la transformée de $\frac{B}{A}$ dans le cas de $a=b=c=d$, etc. On tombe alors sur la réduction connue de $\frac{B}{A}$ en décimales. Une telle suite, si elle est infinie, est nécessairement périodique. Réciproquement si, lorsqu'elle est infinie, les numérateurs m, n, p, etc. ne reviennent pas périodiquement, la fraction génératrice n'est pas rationnelle. Du cas où les numérateurs m, n, p, etc. sont donnés, et où chacun d'eux est égal à l'unité. Application à la fraction qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre : cette suite donne par ses deux premiers termes le rapport d'*Archimède*; par ses trois premiers, celui de *Metius*, etc.

CHAPITRE XXIII.

Notions sur l'analyse indéterminée. 315 à 346.

Ce qu'on entend par questions indéterminées. On ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés sont entiers et positifs, ce qui réduit le nombre des solutions. Mode de résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues. Du cas où on n'a qu'une équation entre plus de deux inconnues. Exemples. Connaissant une première solution de l'équation $ax-by=\pm c$, il est facile de découvrir toutes les autres : elles forment des suites par différences égales. Solution de l'équation $ax=by\pm c$, fondée sur une propriété des fractions continues. Exemples. Extension au cas d'une équation à trois inconnues. Trouver pour x et pour y tous les nombres rationnels qui peuvent satisfaire à l'équation la plus générale du second degré. ..., $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$. Trouver pour x tous les nombres entiers, tels que le trinome mx^2+nx+p devienne un quarré parfait. Trouver les plus petits nombres entiers qui, substitués pour x et pour y, rendront le polynome $Ax^n+Byx^{n-1}+Cy^2x^{n-2}+.....+Ny^n$ les plus petits possibles. Applications de cette méthode.

CHAPITRE XXIV.

De quelques artifices de calcul, propres à rendre rationnelle une fonction irrationnelle de x. 346 à 353.

Assigner les hypothèses propres à rendre rationnelles 1°. $\frac{X}{\sqrt{1+xx}}$, 2°. $X\sqrt{1+xx}$; 3°. $\frac{X}{\sqrt{1-xx}}$; 4°. $X\sqrt{1-xx}$; 5°. $\frac{X}{\sqrt{xx-1}}$; 6°. $X\sqrt{xx-1}$; 7°. $X\sqrt{a+bx+cxx}$; 8°. $\frac{X}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$; X étant une fonction rationnelle de x. Applications à plusieurs exemples.

CHAPITRE XXV.

Formules diverses. 353 à 360.

Démonstrations de 22 formules qui donnent les logarithmes de diverses fonctions de a et de b, exprimées d'une manière finie au moyen de $\log a$, $\log b$, et de logarithmes des lignes trigonométriques des arcs $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$. Démonstrations de deux formules 1°. $1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, α, β, et γ étant les angles faits par la diagonale d'un parallélipipède avec chacune des trois arêtes. 2°. $\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$, θ exprimant l'angle de deux droites qui se coupent à l'origine des coordonnées, et $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, les angles de chacune de ces droites avec les axes des x, y et z. Ce que devient cette relation, lorsque les deux lignes sont à angle droit.

CHAPITRE XXVI.

Démonstration de la règle pour former les racines des équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues. 360 à 369.

Des règles données par *Cramer* et *Bezout* à l'effet de former l'équation de condition qui doit avoir entre les coefficiens ${}^1a, {}^1b, {}^1c$; ${}^2a, {}^2b, {}^2c$; ${}^3a, {}^3b, {}^3c$, etc. pour que les équations $0 = {}^1a\mu + {}^1b\mu' + {}^1c\mu'' +$ etc. $0 = {}^2a\mu + {}^2b\mu' + {}^2c\mu'' +$, etc.; $0 = {}^3a\mu + {}^3b\mu' + {}^3c\mu'' +$, etc., etc. aient lieu : la seconde règle rentre dans la première. Démonstration de la règle de *Bezout*, qui est la plus simple. Application de ce théorème à la formation de l'équation de condition relative à trois équations qui manquent du terme tout connu, et à la composition des formules qui donnent les valeurs des inconnues dans le cas le plus général de ces équations. Abréviations de calcul pour lesquelles on renvoie au mémoire de *Laplace* dont ce chapitre est extrait.

CHAPITRE XXVII.

Sur les différens systèmes de numération, et sur quelques propriétés des nombres considérés comme diviseurs. 369 à 376.

Observations préliminaires. L'expression d'un nombre dans un système, étant donnée, traduire ce nombre dans un autre système de numération. Analyse qui fournit les caractères auxquels on reconnaît qu'un nombre est exactement divisible par un diviseur donné, et le moyen de trouver, indépendamment de la division, le reste qui a lieu lorsque le nombre n'est pas exactement divisible.

Fin de la Table des Matières.

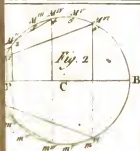
806589
SBN

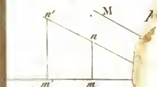


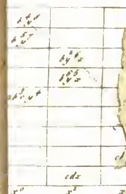
ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
3	12 au numérateur.	. . . .	$(aa'+bb')+(a'b-ab')\sqrt{-}$
17	2 R*	$\delta 2=\beta$	$\delta=2\zeta$
37	5 R		$BA'-AB'=1$
45	dans le titre.	. . . .	des racines incommensurables des
49	11 R	$+3\beta\gamma+$	$+36\gamma+$
86	8	. . . .	$(a^3+b^3+c^3)^2-$
89	7 R	$\sqrt[3]{-^q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$	$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p}{2}}}$
95	dernière.	$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$	$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p}{2}}}$
101	7	$+\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$	$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p}{2}}}$
171	11	$-2px^2+q=0$	$-2px^m+q=0$
172	8 R	$(\cos\pm\sin\varphi\sqrt{-1})$	$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})$
215	8	. . . .	$\log 3=\frac{1}{2}\log 9=$
271	3	$(A''+A'a)+$	$(A''+A'a)h+$
Idem.	entre les 7 et 8 lignes R	. . . .	etc.
275	5 R	étant donnée	étant données
290	7 et 9 R	. . . .	$2\sqrt{2}$
304	dernière.	. . . .	la plus petite
330	10 R	*Dubourget*	*Dubourguet*
331	7 R	$\sqrt{4mu^2-4mp+u^2}$	$\sqrt{4mu^2-4mp+n^2}$
Idem.	5 R	$=u^2-4mp$	$=n^2-4mp$
344	6 R	$B^{VIII}=-14+7=-4$	$B^{VIII}=-14+7=-7$
346	13 R	. . . .	de quelques

* La lettre R indique qu'il faut compter de bas en haut, ou en remontant.









Digitized by Google



Digitized by Google


Google



